

KK 624



LEHRBUCH
DER
GEOMETRIE

NEBST IHRE
AUSGEDEHNTEN ANWENDUNG
AUF DIE
LÖSUNG GEOMETRISCHER PROBLEME,

VORZÜGLICH
ZUM
GEBRAUCHE FÜR SCHULEN,

VON
RAIMUND UNRUH,

Doctor der Philosophie und königlich - bayerischer wirklicher Professor der
Mathematik im königlichen Cadetten - Corps zu München.

Zweyte Auflage.
Mit vier Steindruck - Tafeln.

MÜNCHEN 1831.
Beym Verfasser.

Dreyfach ist des Raumes Maß.

Rastlos fort ohn' Unterlaß

Strebt die *Länge* fort in's Weite;

Endlos giefset sich die *Breite*;

Grundlos senkt die *Tiefe* sich.

Dir ein Bild sind sie gegeben,

Rastlos vorwärts mußt du streben,

Nie ermüdet stille steh'n,

Willst du die Vollendung seh'n,

Mußt in's Breite dich entfalten,

Soll sich dir die Welt gestalten,

In die Tiefe mußt du steigen,

Soll sich dir das Wesen zeigen.

Nur Beharrung führt zum Ziel,

Nur die Fülle führt zur Klarheit

Und im Abgrund wohnt die Wahrheit.

SEINER HOCHWOHLGEBOREN
DEM
KÖNIGLICH BAYERISCHEN
HERRN
GENERAL - MAJOR
UND
COMMANDANTEN
DES
KÖNIGL. BAYER. KADETTEN - CORPS
GEORG VON TAUSCH,
Ritter des Civil - Verdienst - Ordens der bayer. Krone, Inhaber des
Ehren-Kreuzes des königl. bayer. Ludwigs-Ordens etc.

als Zeichen innigster Verehrung und ausgezeichneteter
Hochachtung
gewidmet

von dem Verfasser.



Vorrede

zur ersten Auflage.

Durch den entscheidenden Einfluss ihrer Lehren auf die Befriedigung der dringendsten Bedürfnisse aller Zweige des Lebens genoss die Mathematik bisher mit Recht immer die Achtung aller cultivirten Nationen, denn keine Wissenschaft klärt den Verstand mehr auf, schärft mehr die Urtheilskraft, gewöhnet mehr an eine genauere Ordnung im Denken, als die Mathematik. Besonders zeichnet sich jener Theil derselben, welchen wir unter dem Namen Geometrie kennen, als eine Wissenschaft aus, die nicht blos wegen ihrer ausgebreiteten Verbindung mit anderen Erkenntnissen von grosser Wichtigkeit ist, sondern auch durch ihr Studium an sich ungemein zur Bildung des Verstandes beyträgt. Sie ist es, welche antreibt, seine Vorstellungen sich selbst deutlich zu machen, die Urtheilskraft im Vergleichen übet und der Vernunft Gelegenheit gibt, Gründe für die Wahrheiten zu erkennen und aufzusuchen, um sie zu begreifen, wodurch das systematische Denken befördert wird und auch die Imagination Gelegenheit erhält, allgemeine Begriffe anschaulich darzustellen.

Die Mathematik lässt sich aus zwey sehr verschiedenen Gesichtspuncten betrachten ; nämlich sie erscheint ein Mahl als *Wissenschaft*, und das andere Mahl als *Kunst*. In der ersten erblickt man ihre Methode, eine Reihe von Wahrheiten zu verbinden und in ein System zu vereinigen, so, dass jede einzelne aus der vorhergehenden auf eine einfache und evidente Art erkannt werden kann. In der zweyten müssen die Methoden und die Kunstgriffe dargelegt seyn, um etwas Gesuchtes finden zu können.

Diesemnach habe ich bey Bearbeitung dieses Lehrbuches die eigentlichen Anfangsgründe, als *Wissenschaft* im strengen Zusammenhange und in möglichster Kürze geordnet, also dem Anfänger ein einfaches, vollständiges, auf fester Grundlage ruhendes Gebäude successive aufgeführt; sodann nachher in einem besonderen Anhange Uebungs - Aufgaben und schwierigere Untersuchungen als eine *Anwendung* der Anfangsgründe folgen lassen. Dieses gewähret, meinem Urtheile nach, den zweyfachen Nutzen, dass der Ueberblick über den Zusammenhang der ersten Gründe erleichtert, und zugleich ein einfaches Mittel erhalten werde, ohne lästige Wiederholung der Anfangsgründe ihre Anwendungen zu zeigen.

Die Auflösungen der geometrischen Aufgaben enthalten nicht blos die analytische und synthetische Methode als Anwendung der Algebra, der Seele der Mathematik, sondern auch und besonders die Construction der algebraischen Formeln, von

welchen, so selten etwas in den Lehrbüchern der Geometrie erwähnt ist, da sie doch den grossen Vorthail hat, dass man mittelst derselben stets sieht, wie ein Verhältniss aus dem anderen entsteht, und sich so die abgeleiteten Formeln weit fester in das Gedächtniss einprägt.

Dem Studirenden — welchem ich durch vorliegendes Buch Gelegenheit verschaffen wollte, in möglichster Kürze etwas Gediogenes zu erlernen, welcher auch in diesen wenigen Bogen alles das vollständig findet, was Andere in voluminösen Büchern, unnütz weitläufig und folternd für den Anfänger oft nur halb lieferten, — rathe ich, als ein besonderes Erleichterungs - Mittel, beym Studium dieser Wissenschaft sich jedes Mahl die Figuren, dem Lehrsätze oder der Aufgabe gemäss, zu zeichnen, und im Fortgange des Beweises oder der Auflösung selbe successive zu construiren; indem er nicht selten durch den Anblick der schon vollendeten Figur verwirrt und im Fortschreiten und Durchschauen der einzelnen Beziehungen getäuscht werden könnte.

Da ferner das zweckmässige Studium dieser Wissenschaft eine treffliche Uebung der in der Logik vorkommenden Denkgesetze, ja eigentlich ausübende Logik ist, und als solche den philosophischen Forschungsgeist übt, und gewöhnt, auch als solche zum Besitze einer Menge von Wahrheiten und zu jener Geistesstimmung führt, die man beym Eintritte in andere Wissenschaften mitbringen muss; so könnte dieses Lehrbuch auch füglich — da doch

jeder, der sich den Wissenschaften widmen will, zu seiner philosophischen Ausbildung Mathematik als Wissenschaft studiren soll — in jeder wissenschaftlichen Lehranstalt mit besonderem Nutzen eingeführt werden, indem der Lehrer, beym Vortrage des Systemes dieser Wissenschaft, aus dem Anhange der geometrischen Aufgaben die für seinen Zweck passendste Auswahl machen könnte.

Dieses ist der Gesichtspunct, aus welchem, wie ich wünsche, Sachkundige dieses Lehrbuch betrachten möchten, zu dessen Herausgabe mich der Reichthum der Wissenschaft einerseits, und anderseits der herzlichste Wunsch bewog, den Wissbegierigen im kürzesten Zeitaufwande zur vollsten Erkenntniss dieser Wissenschaft zu leiten.

Das Lehrbuch der Trigonometrie, nach demselben Gesichtspuncte bearbeitet, wird diesem in Bälde folgen.

München im October 1823.

Der Verfasser.

Bericht

zur zweyten Auflage.

Bey gegenwärtiger zweyten Auflage ist in Bezug auf die erste im Wesentlichen nichts geändert, hie und da einige Abkürzungen und kleine Zusätze ausgenommen; daher die Ordnung der §. dieselbe blieb. Am Ende enthält diese Auflage noch hundert gemischte Probleme zur Selbstübung.

München im April 1831.

I n h a l t.

G e o m e t r i e.

Einleitung Seite 1. §. 1.

I. T h e i l.

Von Linien und Flächen.

I. Abschnitt. Von Linien und Winkeln überhaupt Seite 2. §. 4.

II. Abschnitt. Von den Figuren überhaupt, dann
von den Eigenschaften der Dreyecke und der
dahey vorkommenden Linien und Winkel Seite 6. §. 11.

III. Abschnitt. Von den Parallellinien Seite 21. §. 32.

IV. Abschnitt. Von den Eigenschaften der Paral-
lelogramme Seite 27. §. 41.

V. Abschnitt. Von der Lage und Gröfse der ge-
raden Linien in Bezug auf den Kreis Seite 36. §. 52.

VI. Abschnitt. Von den Verhältnissen der Linien
und von der Aehnlichkeit der Figuren Seite 46. §. 67.

VII. Abschnitt.

A. Mefung der geraden und Kreis-Linien,
so wie auch der Winkel Seite 59. §. 88.

B. Berechnung der ebenen Figuren. Seite 65. §. 95.

VIII. Abschnitt. Von den Verhältnissen der Fi-
guren Seite 71. §. 101.

IX. Abschnitt. Von der Lage der Linien gegen
Ebenen, und der Ebenen unter sich Seite 74. §. 106.

II. T h e i l

Von den geometrischen Körpern.

I. Abschnitt. Erklärung der geometrischen Kör-
per Seite 83. §. 117.

II. Abschnitt. Berechnung der Oberflächen der
vorzüglichsten geometrischen Körper Seite 89. §. 126.

III. Abschnitt. Vergleichung der geometrischen
Körper.

A. Vergleichung der Prismen unter sich Seite 96. §. 133.

B. Vergleichung der Pyramiden unter sich
und mit Prismen Seite 104. §. 140.

- IV. Abschnitt. Aehnlichkeit der Körper . Seite 111. §. 147.**
**V. Abschnitt. Berechnung des körperlichen (cu-
bischen) Inhaltes der geometrischen Körper Seite 113. §. 150.**

Geometrische Aufgaben.

- 1) Einleitung Seite 125. §. 1.**
**2) Construction von Gröſſen, welche durch alge-
braische Ausdrücke gegeben sind . Seite 127. §. 2.**
3) Vermischte geometrische Aufgaben . Seite 136. §. 22.
4) Constructions-Aufgaben. Seite 187. §. 87.
5) Stereometrische Aufgaben Seite 193. §. 105.
6) Gemischte Aufgaben zur Selbstübung . Seite 200.

G e o m e t r i e.

E i n l e i t u n g.

§. 1.

Erklärungen. Eine Grösse heisst *stetig* (quantum continuum), wenn ihre Theile so zusammenhängen, dass das Ende des einen unmittelbar der Anfang des andern ist. Man unterscheidet *zeitlich-stetige* und *räumlich-stetige Grössen*, je nachdem die Stetigkeit in Bezug auf die Zeit oder auf den Raum betrachtet wird.

Die Wissenschaft der *räumlich-stetigen* oder der *ausgedehnten Grössen* heisst *Geometrie*.

Der Raum ist unendlich, und hat eine dreifache Ausdehnung (dimensio), nemlich *Länge*, *Breite* und *Höhe*.

Die Ausdehnung nach Länge heisst eine geometrische *Linie*, die nach Länge und Breite eine geometrische *Fläche*, und die Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe ein geometrischer *Körper*.

Das Aeusserste eines Dinges heisst seine *Grenze*. Die Grenze des Körpers ist eine Fläche, die der Fläche eine Linie, und die der Linie ein *Punct*, oder ein Ort im Raume ohne alle Ausdehnung.

§. 2.

Erklärung. Eine Linie entsteht durch die Bewegung eines Punctes, wenn man die Spuren der Bewegung im Raume, als bezeichnet, vorstellt. Eben so bildet die Spur der Bewegung einer Linie die Fläche, und die der Bewegung einer Fläche einen Körper. Die Theile einer Linie sind Linien, die der Fläche Flächen, und die der Körper ebenfalls Körper.

§. 3.

Erklärung. Linien, Flächen und Körper sind, als räumlich-stetige Grössen, der Gegenstand der Geometrie. Diese bestimmt deren Lage, Grösse und deren gegenseitige Verhältnisse.

I. T h e i l.

Von Linien und Flächen.

I. A b s c h n i t t.

Von Linien und Winkeln überhaupt.

§. 4.

Erklärung. Eine *gerade* Linie (*linea recta*) ist diejenige, welche zwischen den auf ihr befindlichen Puncten gleichförmig liegt. Jede Linie, die nicht gerade, und nicht aus geraden Linien zusammengesetzt ist, heisst *krumm* (*curva*). So ist z. B. (Fig. 1.) die Linie *AB* gerade, und die Linie *ACDB* krumm. Ueberdies gibt es auch *gerade-* und *krummgebrochene*. Erstere bestehen aus mehrern geraden Linien, die in verschiedenen Richtungen liegen, und letztere aus mehrern krummen, wie *AEFB* und *ACDB*.

§. 5.

Grundsatz. Von einem Puncte *A* (Fig. 1.) zu einem andern *B* gibt es nur eine gerade Linie, krumme und gebrochene aber unendlich viele. Die gerade Linie ist darunter die kürzeste.

I. Zusatz. Durch zwey Puncte ist die Lage, und durch die Endpuncte auch noch die Grösse einer geraden Linie bestimmt.

II. Zusatz. Zwey gerade Linien schneiden sich nur in einem Puncte.

III. Zusatz. Gerade Linien, die gleich groß sind, sind congruent. *)

§. 6.

Erklärung. Eine *Fläche* heißt *eben* (*superficies plana*), oder eine *Ebene* (*planum*), wenn jede gerade Linie die man von irgend einem Punkte derselben, zu irgend einem andern in ihr, zieht, ganz in der Fläche liegt. Ist kein Theil der Fläche eben, so heißt sie *krumm*.

§. 7.

Postulat. Man kann zwischen jeden zwey Punkten eine gerade Linie ziehen, oder als gezogen denken. Ebenso läßt sich jede gerade Linie beliebig rückwärts oder vorwärts verlängern, und jede Ebene beliebig im Raume erweitern.

§. 8.

Erklärung. Die *Neigung* oder *Abweichung* zweyer Linien *AB* und *BC* (Fig. 2.), die einen Punkt *B* gemein haben, heißt ein *Winkel* (*angulus*). Die Linien *AB* und *BC* heißen seine *Schenkel* (*crura*), der Punkt *B* sein *Scheitel* (*vertex*). Man bezeichnet einen Winkel entweder durch einen kleinen, zwischen die Schenkel gesetzten, Buchstaben, oder durch die drey Buchstaben an den Schenkeln, so, daß man den, am Scheitel stehenden, in die Mitte setzt. So heißt z. B. Fig. 2. der Winkel entweder *x* oder *ABC*, auch *CBA*, oder auch *B*.

I. Zusatz. Die Größe eines Winkels, d. h. die Neigung seiner Schenkel, bleibt unverändert, man mag diese wie immer verlängern oder abkürzen.

II. Zusatz. Gleich große Winkel decken sich, wenn sie auf einander gelegt werden, sind also congruent.

§. 9.

Erklärungen. a) Zwey Winkel *x* und *y* (Fig. 3.), die einen gemeinschaftlichen Schenkel *AD* haben, und deren

*) Bey stetigen Größen findet man die Congruenz, d. i. Uebereinstimmung in Größe und Form, (in Quantität und Qualität) wenn sie, auf einander gelegt, mit allen ihren Theilen zusammenfallen. Man sagt dann, sie decken sich (congruunt).

beyde andere Schenkel BD und DC in eine Verlängerung fallen, heißen *Nebenwinkel* (anguli contigui vel deinceps positi).

b) Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 4.) auf einer andern CD so aufsteht, daß sie sich weder auf die eine Seite, gegen D , noch auf die andere, gegen C , mehr neigt, so heißt jeder dieser *gleichen* Winkel ABC und ABD ein *rechter* (rectus), und man sagt, die Linie AB stehe *senkrecht* oder *perpendicular* auf CD , und umgekehrt. Man bezeichnet den rechten Winkel mit R .

c) Ein Winkel heißt *spitz* (acutus), wenn seine Schenkel sich mehr zusammen neigen, als die eines rechten z. B. y (Fig. 3.), im Gegentheile ist der Winkel *stumpf* (obtusus), wie z. B. x . Spitze und stumpfe Winkel heißen auch *schiefe* (obliqui). Fallen die Schenkel eines Winkels in eine gerade Linie, so heißt der Winkel ein *gerader*, z. B. BDC (Fig. 3.). Nähern sich die Schenkel eines Winkels mehr gegeneinander, als die eines geraden, so heißt der Winkel *hohl* (concavus), im Gegentheile *erhaben* (convexus). In Fig. 5. ist ABC nach oben betrachtet hohl, nach unten aber erhaben.

I. Zusatz. Jeder von zwey gleichen Nebenwinkeln ist ein rechter, oder $= R$. [Erkl. b.]

II. Zusatz. Alle rechte Winkel sind congruent. [§. 8. Zus. II.]

III. Zusatz. Jeder gerade Winkel ist zwey rechten gleich, oder Fig. 4. $CBD = 2 R$. [Erkl. b u. c]; denn es ist, da AB auf CD senkrecht steht, $CBD = CBA + ABD = R + R = 2 R$. [Erkl. b.]

IV. Zusatz. Die Summe zweyer Nebenwinkel ist $= 2 R$. d. i. $x + y = 2 R$. (Fig. 3.); denn es ist

$$x + y = BDC$$

und $BDC = 2 R$. [Zus. III.]

Mithin $x + y = 2 R$.

V. Zusatz. Alle Winkel um einen Punct auf einer Seite einer geraden Linie sind zusammen $= 2 R$. d. i. (Fig. 6.) $x + y + z = 2 R$; denn es ist

$$x + y + z = ABC \text{ und } ABC = 2 R. \text{ [Zus. III.]}$$

Mithin $x + y + z = 2 R$.

VI. Zusatz. Alle Winkel rings um einen Punkt sind zusammen $= 4 R.$ d. i. (Fig. 7.) $ACB + ACD + DCB = 4 R.$; denn verlängert man DC über C , so ist

$$\begin{aligned} ACE + ACD &= 2 R. \\ ECB + DCB &= 2 R. \end{aligned} \quad [\text{Zus. V.}]$$

folglich $ACE + ECB + ACD + DCB = 4 R.$

Es ist aber $ACE + ECB = ACB$, mithin auch

$$ACB + ACD + DCB = 4 R.$$

VII. Zusatz. Wenn zwey oder mehrere aneinander liegende Winkel, z. B. BDC und CDA , (Fig. 8.) in ihrer Summe $2 R.$ ausmachen, so fallen ihre äussersten Schenkel BD und AD in eine gerade Linie. Denn wäre ADB keine gerade Linie, so verlängere man BD z. B. nach F , und FDB sey die gerade Linie; dann ist

$$\begin{aligned} BDC + CDA &= 2 R. \quad [\text{verm. Voraussetzung.}] \\ \text{und } BDC + CDF &= 2 R. \quad [\text{Zus. IV.}] \end{aligned}$$

Mithin wäre $BDC + CDA = BDC + CDF$ und

$CDA = CDF$, welches unmöglich ist, da der Theil dem Ganzen nie gleich seyn kann.

Eben so ist es, wenn die Verlängerung von BD als durch G gehend angenommen würde.

Es muß daher ADB die gerade Linie seyn.

§. 10.

Erklärungen. a) Der Winkel, der einen andern zu einem rechten ergänzt, heisst sein *Complement*; ergänzt er ihn aber zu $2 R.$, so heisst er sein *Supplement*. Z. B. (Fig. 9.) ist x das Complement von y , und umgekehrt; und (Fig. 3.) x das Supplement von y , oder umgekehrt y das Supplement von x .

b) *Scheitel- oder Vertical-Winkel* (anguli verticales) sind jene zwey Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel E (Fig. 10.) haben, und wo die Schenkel des einen Winkels die verlängerten Schenkel des andern sind, z. B. o und n , oder x und y .

Zusatz. Alle Scheitelwinkel sind gleich, d. i. $o = n$; denn es ist

$$\begin{aligned} o + y &= 2 R. \\ n + y &= 2 R. \end{aligned} \quad [\S. 9. \text{Zus. IV.}]$$

$$\text{folglich } \begin{aligned} o + y &= n + y \text{ und} \\ o &= n \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art läßt sich darthun, daß $x = y$ ist.

II. A b s c h n i t t.

Von den Figuren überhaupt, dann von den Eigenschaften der Dreyecke und der dabey vorkommenden Linien und Winkel.

§. 11.

Erklärungen. Eine von allen Seiten begrenzte Fläche heisst eine *Figur*. Die begrenzenden Linien heissen ihre *Seiten*. Die ganze Grenze der Figur wird ihr *Umfang* oder *Perimeter* genannt. (Fig. 11.)

Man nennt die Figur nach Beschaffenheit ihrer Seiten *gerad- krumm- gemischtlinig*.

Eine gerade Linie, die in der Figur von einer Ecke zu einer andern gezogen ist, heisst *Diagonale*. So ist z. B. in der geradlinigen Figur *ABCDE* die Linie *AC* eine Diagonale.

I. Zusatz. Eine geradlinige Figur hat so viele Ecken oder Winkel, als sie Seiten hat. Denn die erste Seite bildet mit der zweyten einen Winkel, ebenso die zweyte mit der dritten den zweyten Winkel, die dritte mit der vierten den dritten Winkel etc. und die letzte Seite macht mit der ersten den letzten Winkel.

II. Zusatz. Es giebt keine geradlinige Figur von zwey Seiten.

III. Zusatz. (Fig. 12.) Wenn ein Punct *A* innerhalb des Umfangs einer Figur und ein anderer *B* ausserhalb desselben liegt, und man verbindet diese beyden Puncte durch eine gerade Linie *AB*; so muss diese den Umfang der Figur wenigstens in einem Puncte *C* schneiden. Verlängert man diese Linie auch rückwärts über *A*, so muss es noch einen zweyten Durchschnittspunct *D* geben.

IV. Zusatz. (Fig. 13.) Wenn ein Punct *A* des Umfangs einer Figur innerhalb und ein zweyter *B* ausserhalb des Umfangs einer andern Figur liegt, so schneiden sich die Perimeter dieser Figuren wenigstens in 2 Puncten *C* und *D*.

§. 12.

Erklärungen. a) Die geradlinigen Figuren heissen nach der Anzahl ihrer Seiten *Dreyecke* (triangula), *Vierecke* (tetragona), *Fünfecke* etc. Hat eine Figur mehr als 4 Seiten, so heisst sie im Allgemeinen *Vieleck* (Polygonum).

b) Sind bey einer Figur alle Seiten und Winkel gleich, so heisst sie *regulär*, im Gegentheile *irregulär*.

c) Hat ein Dreyeck alle 3 Seiten gleich, so nennt man es *gleichseitig* (aequilaterum) (Fig. 14.), hat es nur 2 Seiten gleich, *gleichschenkelig* (aequicrurum) (Fig. 15.). Die beyden gleichen Seiten heissen *Schenkel*, die dritte Seite ist die *Grundlinie*, und die der Grundlinie gegenüberstehende Ecke die *Spitze* des Dreyeckes. Sind in einem Dreyecke alle Seiten ungleich, so heisst es *ungleichseitig* (scalenum) (Fig. 16.). Man bezeichnet die Dreyecke mit den drey, an ihren Ecken stehenden, Buchstaben, welchen man das Zeichen Δ vorsetzt. Z. B. ΔABC .

§. 13.

Erklärungen. (Fig. 17.) a) Bewegt sich eine gerade Linie AB um einen ihrer Endpunkte A so lange, bis sie wieder in ihre vorige Lage kömmt, so entsteht eine *Kreisfläche* oder ein *Kreis* (circulus). Der Punct A heisst *Mittelpunct* (centrum), und die Linie AB der *Halbmesser* (radius) des Kreises. Die krumme Linie, die der Punct B beschreibt, heisst *Peripherie* oder *Umkreis* (circumferentia), ein Theil davon ein *Bogen* (arcus). Jede gerade Linie, z. B. DE , die von einem Puncte der Peripherie bis zu einem andern derselben gezogen ist, heisst *Sehne* (chorda). Geht die Sehne durch den Mittelpunct, so nennt man sie *Durchmesser* (diameter). Jene gerade Linie, welche mit der Peripherie nur einen Punct gemein hat, übrigens, wie immer verlängert, ganz ausserhalb des Kreises liegt, heisst *Tangente*, z. B. FH , und eine über den Kreis hinaus verlängerte Sehne eine *Secante*, z. B. DI .

b) Ein *Kreis-Abschnitt* (segmentum) ist ein Theil des Kreises, der durch eine Sehne und einen Bogen begrenzt wird, wie z. B. (Fig. 17.) DGE .

c) Ein *Kreis-Ausschnitt* (sector) ist ein Theil des Kreises, der durch 2 Radien und den dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird, z. B. ABC .

d) Zwey Kreise, die einerley Mittelpunct haben, heissen *concentrisch* (Fig. 18.) Haben die Kreise verschiedene Mittelpuncte, so sind sie *excentrisch*. Die gerade Linie zwischen den Mittelpuncten zweyer Kreise heisst *Centrallinie*.

I. Zusatz. Alle Radien desselben Kreises sind gleich-groß, und der Diameter ist zwey Radien gleich.

II. Zusatz. Alle Kreise, deren Radien oder Durchmesser gleich groß sind, sind congruent; denn sie decken sich, aufeinandergelegt, vollkommen.

III. Zusatz. Alle congruenten Kreise haben gleiche Radien oder Diameter.

IV. Zusatz. Der Diameter theilt jeden Kreis, so wie seine Peripherie, in 2 congruente Theile. Denn, man lege (Fig. 19.) den Theil ABC so auf ADC , daß A auf A und E auf E zu liegen kömmt, dann muß C in C fallen. Es müssen aber auch alle Theile von ABC genau auf ADC liegen; denn, gesetzt ein Punct von ABC fiele ausserhalb ADC , so gehörte zu ihm ein grösserer, und gesetzt er fiele innerhalb, ein kleinerer Radius; gegen *Zus. I.*

V. Zusatz. Eine gerade Linie schneidet den Kreis in 2 Puncten. [§. 11. *Zus. III.*]

§. 14.

Postulat. Aus jedem Puncte kann man mit jedem Radius einen Kreis beschreiben.

§. 15.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke ist die Summe je zweyer Seiten grösser als die dritte.

Beweis. Betrachtet man (Fig. 14.) im $\triangle ABC$ die gerade Linie AB , so ist sie als solche die kürzeste zwischen A und B [§. 5.]. Die gebrochene Linie ACB muß daher länger seyn als die gerade AB [§. 5.]; daher $AB < AC + CB$. Eben so ist auch $AC < AB + BC$ und $BC < AC + AB$.

§. 16.

Aufgabe. (Fig. 20.) Ueber eine gegebene gerade Linie AB ein gleichseitiges Dreyeck zu construiren.

Auflösung. Man beschreibe aus A und B mit den Radien AB und BA Kreise [§. 14.], und ziehe nach ihren gemeinschaftlichen Durchschnits-Punct C die geraden Linien AC und CB , so ist das $\triangle ABC$ das verlangte.

Beweis.

Es ist $AC = AB$
und $CB = AB$ [§. 13. *Zus. I.*]

Mithin $AC = CB = AB$ d. i. das Dreyeck gleichseitig.
(§. 12. c.)

Es ist nur noch zu zeigen, daß obige 2 Kreise in C einen gemeinschaftlichen Durchschnits-Punct haben. Man verlängere daher AB bis D , so, daß $BD = AB$ ist (§. 7.), so geht der Kreis um B durch D , einen Punct ausserhalb des Kreises um A , weil $AD = 2AB$ ist, und auch durch A , einen Punct innerhalb desselben, folglich schneidet er den andern Kreis [§. 11. Zus. IV.].

§. 17.

Aufgabe. Aus drey gegebenen Linien, m , n und o (Fig. 21.), wovon immer zwey zusammen grösser sind als die dritte, ein Dreyeck zu construiren.

Auflösung. Man ziehe eine Linie $BC = o$, und beschreibe aus B mit dem Radius m , und aus C mit dem Radius n , Kreise, die sich in A schneiden. Zieht man AB und AC , so ist das $\triangle ABC$ das verlangte.

Beweis. Der Construction gemäß ist

$$AB = m$$

$$AC = n$$

und $BC = o$ das heisst die 3 gegebenen Linien sind Seiten des Dreyeckes.

Es ist nur noch zu beweisen, daß A ein Durchschnits-Punct beyder Kreise ist. Man verlängere BC so, daß $CE = DC = AC$ wird. Es geht der Kreis um C , durch E , einen Punct ausserhalb des Kreises um B , weil

$$\begin{aligned} BA = BF &< BC + AC \text{ [vermöge Voraussetzung der} \\ &< BC + CE \text{ Aufgabe]} \\ &< BE, \end{aligned}$$

und auch durch D , einen Punct innerhalb des Kreises um B , weil

$$\begin{aligned} BC &< AB + AC \text{ [verm. Voraussetzung]} \\ &< BF + DC \text{ mithin} \end{aligned}$$

$$BC - DC < BF \text{ oder}$$

$$BD < BF \text{ ist.}$$

Die beyden Kreise schneiden sich also. [§. 11. Zus. IV.]

Auf dieselbe Art läßt sich ein gleichschenkliges $\triangle$ construiren, wenn 2 Seiten (d. i. ein Schenkel und die Grundlinie) gegeben sind. Jedoch müssen die zwey Schenkel zusammen grösser als die Grundlinie seyn. (§. 15.).

Zusatz. Kreise schneiden sich, wenn von den drey Linien, der Centrallinie und den beyden Radien, stets zwey

zusammen grösser sind als die dritte. [Aufgabe und §. 11. Zus. IV.]

§. 18.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind congruent, wenn sie zwey Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel gegenseitig gleich haben.

Beweis. (Fig. 22). Es ist darzuthun, dafs unter den Bedingungen $AB = ab$, $AC = ac$ und $BAC = bac$, die beyden Dreyecke ABC und abc vollkommen einerley, d. i. congruent, sind. [§. 5. Anm.]

Man lege das $\triangle abc$ so auf das $\triangle ABC$, dafs a auf A und ab auf AB zu liegen kömmt, so fällt b auf B , indem $AB = ab$ ist [§. 5. Zus. III.], und ac in die Richtung von AC , weil $BAC = bac$ ist [§. 8. Zus. II], endlich auch c auf C , indem $AC = ac$ ist [§. 5. Zus. III.]. Es fällt also auch bc mit BC (§. 5.) und abc mit ABC , so wie auch acb mit ACB , folglich auch der Dreyecke ganze Fläche zusammen. Mithin ist $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

I. Zusatz. Zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen ein Dreyeck vollkommen.

II. Zusatz. In congruenten Dreyecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt; oder die gleichliegenden Seiten und Winkel sind gleich.

III. Zusatz. Ist, in dem $\triangle ABC$, $AB = AC$ und, im $\triangle abc$, $ab = ac = AB$ (Fig. 22.) d. h. sind beyde Dreyecke gleichschenkelig, so kann man, wenn auch $BAC = bac$ ist, das $\triangle abc$ ausser der vorigen Lage [im Beweise des Lehrs.] auch noch so auf das $\triangle ABC$ legen, dafs a auf A , aber ab auf AC fällt; dann mufs ac längst AB , so wie auch b auf C , und c auf B fallen, indem $ab = AC$ und $ac = AB$ ist. Beyde Dreyecke decken auch in dieser Lage [Lehrs.], und es ist

$abc = ACB$; aber gemäß des Lehrsatzes auch

$abc = ABC$

folgl. $ACB = ABC$ d. h.

IV. Zusatz. In jedem gleichschenkligen Dreyecke ABC sind die Winkel an der Grundlinie gleich. Denn man kann sich eben dieses Dreyeck noch ein Mahl vorstellen (als $\triangle abc$), und wie im vorigen Zusatze verfahren.

V. Zusatz. In jedem gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel gleich; denn es ist auch gleichschenkelig, man mag was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen [*Zus. IV.*]. Das gleichseitige Dreyeck ist eine reguläre Figur. [§. 12. b.]

§. 19.

Lehrsatz. (Fig. 23.) Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel gleich sind, so ist es gleichschenkelig, d. i. die beyden, den gleichen Winkeln entgegenstehenden, Seiten sind gleich.

Beweis. *) *Thesis.* $AB = AC$

*) *Daten.* $ABC = ACB$

Kann man zeigen, dafs AB unter diesen Bedingungen weder grösser noch kleiner als AC ist, so ist der Lehrsatz bewiesen. **)

Wäre $AB > AC$, so schneide man von AB ein Stück $BD = AC$ ab, und ziehe DC , so müßte,

$$\text{da } BC = BC$$

$$BD = AC$$

$$DBC = ACB \text{ [verm. Daten.] ist,}$$

auch $\triangle BDC \cong \triangle ABC$ [§. 18.] seyn, welches unmöglich ist, da ein Theil dem Ganzen nie gleich seyn kann.

Auf einen gleichen Widerspruch stößt man durch dasselbe Verfahren, wenn man $AB < AC$ annimmt. Da es nun unmöglich ist, dafs $AB >$ oder $< AC$ ist, so muß $AB = AC$ seyn.

*) *Thesis* (oder *Th.*) bedeutet den zu beweisenden Satz, *Daten* (oder *Dat.* auch *D.*) aber die gegebenen Bedingungen des Lehrsatzes und die Eigenschaften, die in der Figur sich finden, oder durch Construction zum Behufe des Beweises hineingelegt werden. Der Deutlichkeit und genauen Uebersicht wegen ist es nöthig *Th.* und *D.* bey jedem Lehrsatze auszuscheiden und anzusetzen.

**) Man nennt diese Beweis - Art *indirect*, indem man die Wahrheit des Satzes dadurch darthut, dass man zeigt, das Gegentheil desselben sey unmöglich, weil daraus sich Folgerungen ergeben, die anerkannten Wahrheiten geradezu widersprechen.

Zusatz. Ein Dreyeck, welches drey gleiche Winkel hat, ist gleichseitig.

§. 20.

Lehrsatz. (Fig. 24.) Zwey Dreyecke sind congruent, wenn in ihnen jede Seite des einen einer Seite des andern gleich ist.

Beweis. *Thes.* $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Daten. $AB = ab$, $BC = bc$, $AC = ac$

Würste man, daß $BAC = bac$ ist, so wären beyde Dreyecke nach §. 18. congruent. Diefs läßt sich aber darthun; nemlich:

Man lege das $\triangle abc$ an das $\triangle ABC$, so, daß b in B und bc auf BC fällt, das Dreyeck aber die entgegengesetzte Lage vom $\triangle ABC$ erhält. Das dahin gelegte Dreyeck abc werde durch das $\triangle BCD$ vorgestellt. Man ziehe AD , so ist

$AB = ab = BD$ folgl. $\angle o = n$ [§. 18. Zus. IV.] eben so

$AC = ac = DC$ „ $\angle x = m$ [§. 18. Zus. IV.]

Mithin $\angle o + x = n + m$ oder

$BAC = BDC$

$= bac$.

Da nun die Dreyecke ABC und abc nebst diesen Winkeln auch die einschliessenden Seiten gleich haben, so sind sie nach §. 18. congruent.

Zusatz. Durch die drey Seiten eines Dreyeckes ist dasselbe vollkommen bestimmt.

§. 21.

Aufgaben. (Fig. 22.) 1) Einen gegebenen Winkel ABC nachzuzeichnen.

Auflösung. Man ziehe AC , und construire aus AB , AC und BC das Dreyeck abc (§. 17.), so ist abc der verlangte Winkel.

Beweis. Es ist $ab = AB$

$ac = AC$

$bc = BC$

folgl. $\triangle abc \cong \triangle ABC$ [§. 20.]

und $\angle abc = \angle ABC$ [§. 18. Zus. II.]

2) Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbiren.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey ABC (Fig. 25.)

Man schneide die gleichen Stücke BD und BE von den Schenkeln ab, ziehe DE , errichte darüber das gleichschenklige $\triangle DEF$ [§. 17.], worin $DF = EF$ ist, und ziehe BF , so halbirt diese Linie den Winkel, und es ist $o = x = \frac{1}{2} ABC$.

Beweis. Daten. $BD = BE$
 $DF = FE$
 $BF = BF$ } [vermöge der Construct.]

Mithin $\triangle BDF \cong \triangle BEF$. [§. 20.]
 und $o = x$ [§. 18. Zus. II.]

§. 22.

Aufgabe. (Fig. 26.) Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB . Man errichte darüber ein gleichschenkliges $\triangle ABC$ [§. 17.] und halbire durch CD den Winkel ACB [§. 21. 2.], so muß $AE = EB$ seyn.

Beweis. Dat. Es ist $AC = CB$
 $o = n$
 $CE = CE$ } gemäß d. Construct.

daher $\triangle ACE \cong \triangle CBE$ [§. 18.] und folgl.
 $AE = EB$ [§. 18. Zus. II.]

§. 23.

Aufgaben. 1) In einem gegebenen Punkte C einer geraden Linie AB auf dieser eine senkrechte zu errichten. (Fig. 27.)

2) Von einem gegebenen Punkte C auf die gerade Linie AB eine senkrechte zu fällen (Fig. 28.)

Auflösung. Man setze den Zirkel in C ein, durchschneide AB in M und N , und construire das gleichschenklige Dreyeck MND in Aufg. Nro. 1. ober, und in Nro. 2. unterhalb MN , so muß DC senkrecht auf AB stehen, oder

Beweis. Thes. $o = n = R$ seyn.

Dat. ad 1) $MC = CN$ [§. 13. Zus. I.]
 $MD = DN$
 $CD = CD$

also $\triangle MCD \cong \triangle CDN$ [§. 20.]

und $o = n = R$ [§. 18. Zus. II. und §. 9. Zus. I.]

ad 2) $MC = CN$ [§. 13. Zus. I.]

$x = y$ [§. 21. 2.]

$CE \Rightarrow CE$

daher $\triangle MCE \cong \triangle CEN$ [§. 18.]

und $o = n = R$ [§. 18. Zus. II.] und
[§. 9. Zus. I.]

I. Zusatz. (Fig. 27.) Eine gerade Linie CD , die aus der Mitte der Grundlinie C eines gleichschenkligen Dreyeckes MDN nach dessen Spitze gezogen ist, halbt das gleichschenklige Dreyeck (denn es ist nach Beweis 1. $\triangle MCD \cong \triangle CDN$ folglich $\Rightarrow \frac{1}{2} \triangle MDN$), so wie auch den Winkel an der Spitze (nemlich $z = p = \frac{1}{2} MDN$, nach §. 18, Zus. II.), und steht auf der Grundlinie senkrecht, da $o = n = R$ ist.

II. Zusatz. (Fig. 27.) Beschreibt man aus D mit $DM = DN$ einen Kreis, so erscheint MN als Sehne und vermöge *I. Zus.* steht eine gerade Linie, die aus der Mitte C einer Sehne nach den Mittelpunkt des Kreises gezogen ist, auf der Sehne senkrecht, und halbt den Winkel des Ausschnitts [§. 13. c.]

III. Zusatz. (Fig. 28.) Eine gerade Linie CE , die den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreyeckes MCN halbt, halbt das Dreyeck selbst (denn es ist nach Beweis 2. $\triangle MCE \cong \triangle CEN$, folglich $\Rightarrow \frac{1}{2} \triangle MCN$), und seine Grundlinie (denn es ist $ME = EN$ [§. 18. Zusatz II.]), und steht auf ihr senkrecht (da $o = n = R$ ist).

IV. Zusatz. (Fig. 28.) Vermöge des *III. Zus.* halbt eine gerade Linie, die den Winkel des Ausschnittes MCN halbt, auch die Sehne des Ausschnitts und steht auf ihr senkrecht.

§. 24.

Lehrsatz. Wenn man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyeckes eine senkrechte auf derselben errichtet, so geht sie durch die Spitze des Dreyeckes.

Beweis. (Fig. 29.) Gesetzt, die senkrechte ginge nicht durch die Spitze A , sondern z. B. wie DE , so wäre

$EDB = R.$ [§. 9. b.] Man ziehe AD ,
dann ist $ADB = R.$ [§. 23. Zus. I.]

Folgl. wäre $ADB = EDB$, welches unmöglich ist.

Auf denselben Widerspruch kömmt man, wenn man statt DE die Lage FD annimmt.

Da nun die senkrechte weder rechts noch links von A vorbeigehen kann, so muss sie durch A selbst gehen.

I. Zusatz. Eine senkrechte, auf der Mitte einer Sehne errichtet, muss, gehörig verlängert, durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

II. Zusatz. Auf einer geraden Linie gibt es in einem Punkte nur eine senkrechte.

§. 25.

Erklärung. Wenn man in einem Dreyecke ABC (Fig. 30.) eine Seite verlängert, so heisst der dadurch entstehende Winkel ausserhalb des Dreyeckes, nämlich o , der äussere den innern y und z entgegengesetzte, und x der innere anliegende, Winkel.

§. 26.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke eine Seite verlängert, so ist jedesmal der äussere Winkel grösser als jeder der innern entgegengesetzten.

Beweis. (Fig. 31.) *Thes.* 1) $ACD > BAC$.

2) $ACD > ABC$.

Dat. ad 1) Man halbire AC , so ist $CE = AE$, ziehe BE u. mache dessen Verlängerung $EF = BE$. Zieht man ferner FC , so ist auch $o = n$ [§. 10. Zus.]

Mithin $\triangle EFC \cong \triangle AEB$ [§. 18.]

und $ACF = BAC$ [§. 18. Zus. II.]

Es ist aber $ACF < ACD$, als Theil vom Ganzen, folgl. $BAC < ACD$.

ad 2) Man verlängere AC über C , so ist

$ACD = BCG$ [§. 10. Zus.]. Es ist aber auch

$ABC < BCG$ [vermöge 1.; denn ABC hat in Bezug auf BCG dieselbe Lage als BAC in Bezug auf ACD]

folgl. $ACD > ABC$.

Zusatz. (Fig. 32.) In einem Dreyecke, das einen rechten Winkel hat, sind die beyden andern spitz; denn sie

müssen kleiner seyn, als der äussere entgegengesetzte, der ebenfalls ein rechter ist [§. 9. Z. IV.]

§. 27.

Lehrsatz. (Fig. 33.) In jedem Dreyecke ist die Summe je zwey und zweyer Winkel kleiner als 2 rechte.

Beweis. Thes. 1) $x + z < 2 R.$ 2) $y + z < 2 R.$
3) $x + y < 2 R.$

Daten. Man verlängere BC über C und B , so ist:

ad 1) $x < o$ [§. 26.]		ad 2) Es ist $y < o$ [§. 26.]
$z = z$		$z = z$
folgl. $x + z < o + z$		Mithin $y + z < o + z$
$< 2 R.$ [§. 9. Z. IV.]		$< 2 R.$ [§. 9. Z. IV.]
ad 3) Es ist $x < m$ [§. 26.]		

$y = y$
Also $x + y < m + y$
 $< 2 R.$ [§. 9. Zus. IV.]

I. Zusatz. Ein Dreyeck kann nur *einen* rechten und auch nur *einen* stumpfen Winkel haben. Im ersten Falle heisst das Dreyeck *rechtwinklig*, im zweiten *stumpfwinklig*. Bey rechtwinkligen Dreyecken heissen die zwey Seiten, welche den rechten Winkel bilden, *Katheten*, die dritte Seite *Hypotenuse*.

II. Zusatz. Man kann von einem Punkte auf eine gerade Linie nur eine senkrechte fällen; denn sonst entstände ein Dreyeck mit zwey rechten Winkeln.

§. 28.

Lehrsatz. (Fig. 34.) In jedem Dreyecke steht der grössere Winkel der grössern Seite gegenüber.

Beweis. Th. $ABC > C$

Daten. $AC > AB$. Man trage AB , von A aus, auf AC auf, so, dass $AD = AB$ wird, so mufs, wenn man BD zieht,

$o = n$ seyn [§. 18. Zus. IV.]

Es ist aber $n > C$ [§. 26.]

Mithin auch $o > C$.

Nun ist $o < ABC$, als Theil;

folglich mufs $ABC > C$ seyn.

1. Zusatz. In jedem Dreyecke steht dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber, d. i. [Fig. 34.] wenn

$ABC > C$ ist, so muß $AC > AB$ seyn; denn wären beyde Seiten gleich, so müßten es auch die Winkel ABC und C seyn [§. 18. *Zus. IV.*] und wäre $AC < AB$, so müßte dem Lehrsatz gemäß $ABC < C$ seyn. Da nun unter der Voraussetzung, daß $ABC > C$ ist, die Seite AC weder mit AB gleich, noch kleiner seyn kann als AB , so muß sie grösser als AB seyn.

II. Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist die Hypotenuse grösser als jede Kathete, und im stumpfwinkligen die Seite die grösste, die dem stumpfen Winkel gegenübersteht. [*Zus. I.*]

III. Zusatz. Die senkrechte ist die kürzeste gerade Linie, die man von einem Punkte nach einer geraden Linie ziehen kann [*Zus. II.*], denn jede andere ist Hypotenuse. Man bedient sich der senkrechten zur Bestimmung der Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie. So ist die Höhe eines Dreyeckes die senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie.

§. 29.

Aufgabe. Ein Dreyeck zu construiren, das mit einem gegebenen congruent ist.

Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht wie §. 17.; den Beweis gibt §. 20.

Zusatz. Um eine geradlinige Figur nachzuzeichnen zerfalle man sie durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in Dreyecke, und setze durch das Zeichnen der einzelnen Dreyecke die Figur zusammen, welche dann mit der gegebenen congruent ist.

§. 30.

Lehrsatz. (Fig. 35.) Zwey Dreyecke sind congruent, wenn sie zwey Seiten und den der grössern derselben gegenüberstehenden Winkel gegenseitig gleich haben.

Beweis. Thes. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Dat. $AB = ab$, $AC = ac$, $B = b$, $AC > AB$, $ac > ab$.

Man lege das Dreyeck abc so auf das Dreyeck ABC , daß b in B und ab in die Richtung von AB , also a in A fällt, weil $ab = AB$ ist; auch fällt dann bc in die Richtung von BC , indem $B = b$ ist.

Nun muß, weil auch $AC = ac$ ist, der Punct c in C fallen; denn gesetzt er fiel nicht in C , so müßte er

a) entweder zwischen B und C , oder

b) in die Verlängerung von BC fallen. Jedoch, weder das Eine noch das Andere kann seyn. Denn

ad a) fiel c zwischen B und C z. B. in D , so daß

$BD = bc$ ist, und zieht man AD , so ist auch

$AB = ab$ und

$B = b$. Es wäre

folgl. $\triangle ABD \cong \triangle abc$ [§. 18.] und daher

auch $AD = ac = AC$ [§. 18. Zus. II.]

also $o = n$ [§. 18. Zus. IV.] und

da $o > B$ [§. 26.] so wäre

auch $n > B$ mithin

$AB > AC$ [§. 28. Zus. I.], welches der Voraussetzung

$AC > AB$ widerspricht.

ad b) Fiele c in die Verlängerung von BC z. B. in F , so, daß $BF = bc$ ist, und zieht man AF , so ist auch

$AB = ab$

$B = b$, folglich wäre

$\triangle ABF \cong \triangle abc$, und daher

$AF = ac = AC$ [§. 18. Zus. II.] Dann müßte

aber $x = m$ [§. 18. Zus. IV.] und da

$m > B$ [§. 26.] ist, auch

$x > B$ seyn, folglich wäre

$AB > AF$ [§. 28. Zus. I.] u. da $AF = AC$.

auch $AB > AC$, gegen die Voraussetzung. $AC > AB$.

Es muß also c in C fallen, und

$BC = bc$ seyn. Es ist aber

auch $AB = ab$ [Daten.], und

$B = b$ [Daten].

Mithin $\triangle ABC \cong \triangle abc$ [§. 18.]

I. Zusatz. Durch zwey Seiten und den, der grösseren derselben gegenüberstehenden, Winkel ist ein Dreyeck vollkommen bestimmt.

II. Zusatz. Rechtwinklige Dreyecke sind congruent, wenn sie nebst der Hypotenuse auch eine Kathete gleich haben.

III. Zusatz. Wenn man aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreyeckes auf die Grund-Linie eine senkrechte fällt, so theilt diese den Winkel an der Spitze, die Grundlinie und das Dreyeck in zwey gleiche Theile; denn in Fig. 36. ist $\triangle ABD \cong \triangle ADC$, weil $\angle o = \angle n = \angle R$ (verm. Constr.) und $AB = AC$, dann $AD = AD$ ist [Zus. II.]; folglich muſs $\angle x = \angle y$ und $BD = DC$ [§. 18. Zusatz II.] seyn.

IV. Zusatz. Wenn man vom Mittelpuncte eines Kreises eine Senkrechte auf eine Sehne fällt, so halbirt sie die Sehne und den Winkel des Ausschnitts. [Zus. III.]

§. 31.

Lehrsatz. (Fig. 35.) Zwey Dreyecke sind congruent, wenn in ihnen gegenseitig eine Seite und zwey gleichliegende Winkel gleich sind.

Beweis. Thesis. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Es finden hier zwey Fälle Statt, nemlich:

a) entweder liegen beyde gleiche Winkel an der gegebenen Seite, oder

b) es liegt nur einer daran.

ad a) **Daten.** $AB = ab$, $\angle B = \angle b$, $\angle BAC = \angle bac$.

Man lege das Dreyeck abc so auf das Dreyeck ABC , daſs a in A , und ab in die Richtung von AB fällt, so muſs, da $AB = ab$ ist, b in B fallen. Weil $\angle a = \angle A$, und $\angle b = \angle B$ ist, so muſs ac in die Richtung von AC und bc in die von BC fallen, und

$BC = bc$ seyn.

Denn BC kann unter den Bedingungen des Lehrsatzes weder grösser noch kleiner als bc seyn.

Wäre $BC > bc$, z. B.
 $BD = bc$, und zieht
 man AD ,

so ist $AB = ab$ } [Dat.]
 und $B = b$ }

Mith. $\triangle ABD \cong \triangle abc$. [§. 18.]

Folglich

müßte $BAD = bac$ [§. 18.]

Zus. II.]

und $BAD = BAC$ [Dat.]

seyn, welches unmöglich ist,
 da BAD ein Theil von BAC
 ist.

Es muß also $BC = bc$ seyn.

Auch ist $AB = ab$ } [Daten.]
 und $B = b$ }

Mithin $\triangle ABC \cong \triangle abc$ [§. 18.] (Beweis für a).

ad b) Daten. $AB = ab$, $B = b$, $ACB = acb$. Auch
 hier lege man das $\triangle abc$ so auf das $\triangle ABC$, daß der
 Punct a in A , ab in die Richtung von AB , folglich b auf
 B fällt, da $ab = AB$ ist. Es muß dann bc in die Rich-
 tung von BC fallen, denn es ist der Winkel $b = B$, und
 da auch $ACB = acb$ ist, so muß der Punct c in C fal-
 len, oder

$BC = bc$ seyn;

denn auch hier kann unter den Bedingungen des Lehr-
 satzes BC weder grösser noch kleiner als bc seyn.

Wäre $BC > bc$, z. B.
 $BD = bc$, und zieht
 man AD ,

so ist $AB = ab$ } [Dat.]
 und $B = b$ }

$\triangle ABD \cong \triangle abc$ [§. 18.],

und es wäre

auch $ADB = acb$ [§. 18.]

Zus. II.]

und $ADB = ACB$ [Dat.],

welches dem Lehrsatz §. 26.
 widerspricht.

Wäre $BC < bc$, z. B.

$BF = bc$, und zieht
 man AF ,

so ist $AB = ab$ } [Dat.]
 und $B = b$ }

Dah. $\triangle ABF \cong \triangle abc$. [§. 18.]

Folglich

müßte $BAF = bac$ [§. 18.]

Zus. II.]

und $BAF = BAC$ [Dat.]

seyn, welches ebenfalls un-
 möglich ist, da BAC ein Theil
 von BAF ist.

Wäre $BC < bc$, z. B.

$BF = bc$, und zieht
 man AF ,

so ist $AB = ab$ } [Daten.]
 und $B = b$ }

$\triangle ABF \cong \triangle abc$ [§. 18.],

und es

wäre $AFB = acb$ [§. 18.]

Zus. II.]

und $AFB = ACB$ [Dat.],

ebenfalls gegen §. 26.

Es muß also $BC = bc$ seyn, und

$$\text{da } \left. \begin{array}{l} AB = ab \\ B = b \end{array} \right\} \text{ [Daten] ist,}$$

so ist auch hier $\triangle ABC \cong \triangle abc$ [§. 18.] (Beweis für b.)

III. A b s c h n i t t.

Von den Parallellinien.

§. 32.

Erklärungen. Parallellinien sind gerade, in einer Ebene befindliche, Linien, die in allen Punkten gleichen Abstand von einander haben, welcher Abstand durch eine senkrechte von irgend einem Punkte der einen auf die andere gemessen wird. [§. 28. Zus. III.] *)

Diese gleichen Abstände geben zu erkennen, daß Parallelen nie zusammenstossen, wenn sie auch beyderseits wie immer verlängert werden.

Das Zeichen des Parallelseyns zweyer Linien ist $\parallel$ z. B. $AB \parallel CD$ (Fig. 37.). Wenn zwey Parallelen (Fig. 38.) AB und CD von einer geraden EF durchschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, wovon x , y , m und o die innern,

*) In dieser Erklärung liegt das Axiom zum Grunde, daß die Linie, welche durch die Endpunkte aller, auf einer geraden Linie errichteten, gleich grossen, Perpendikel geht, eine gerade sey. Dieses Axiom möchte darin vor dem Euclidischen einen Vorzug haben, daß die Vorstellungskraft nicht genöthigt ist, sich in's Unendliche zu verlieren, und daß es unmittelbar mit dem Begriffe von einer geraden Linie zusammenhängt. Denn in der geraden Linie haben alle Punkte einerley Lage gegeneinander, in soferne man auf ihre Abstände nicht achtet [§. 4.]; die darauf senkrechten geraden haben einerley Lage gegen dieselbe; die Endpunkte dieser gleich gross genommenen senkrechten haben also auch einerley Lage untereinander, gleich den Punkten auf jener, und liegen daher in einer geraden Linie.

dann n , s , t und u die äussern heissen; y und o , dann x und m sind innere, s und u , dann n und t äussere auf einer Seite liegende Winkel. x und o , so auch y und m sind innere, s und t , so wie n und u äussere Wechselwinkel. Endlich hat man auch äussere und innere entgegengesetzte Winkel, als s und o , n und m , t und x , u und y .

§. 33.

Lehrsatz. Steht eine gerade Linie auf einer von zwey parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. (Fig. 37.) *Thesis.* $m = n = R$.

Daten. $AB \parallel CD$, $EFC = EFD = R$. Man mache $FG = FH$, und errichte IG und KH auf CD senkrecht, so ist auch

$IGF = KHF = R$, und, da $AB \parallel CD$, auch $IG = KH$ [§. 32.]; zieht man IF und KF , so ist, weil auch $FG = FH$ [Constr.] ist,

$\triangle IGF \cong \triangle KHF$ [§. 18.], mithin
 $o = x$ und $IF = KF$ [§. 18. Zus. II.].

Es ist auch $o + y = z + x = R$ [Daten.]
 $o = x$

Also $y = z$, dann
 $IF = KF$
 $EF = EF$

folglich $\triangle IEF \cong \triangle EKF$ [§. 18.], und
 $m = n = R$ [§. 18. Zus. II. und §. 9. Zus. I.]

Zusatz. Es sind also IG , EF und KH die Abstände sowohl der Linie AB von CD , als auch der Linie CD von AB .

§. 34.

Lehrsatz. Wenn zwey parallele Linien, AB und CD , (Fig. 38.) durch eine dritte EF geschnitten werden, so sind

I. die Wechsel-Winkel gleich,

II. der äussere und innere entgegengesetzte Winkel gleich,

III. die zwey innern, auf einer Seite liegenden, Winkel zusammen genommen zwey rechten gleich.

Beweis. ad I. *Th.* $x = o$.

Dat. $AB \parallel CD$. Man halbiere GH , fälle von L auf CD die senkrechte LK , und verlängere sie bis I ; so muß diese Linie auch auf AB senkrecht stehen [§. 33.]. Es ist dann

$$LIG = LKH = R.$$

$$GL = LH \text{ [Daten.]}$$

$$ILG = HLK. \text{ [§. 10. Zus.]}$$

Mithin $\triangle LIG \cong \triangle LKH$ [§. 31.], und

folglich $x = o$. [§. 18. Zus. II.]

ad II. *Thes.* $s = o$.

Dat. $AB \parallel CD$. Es ist $s = x$. [§. 10. Zus.]

$$x = o \text{ [I.]}$$

$$\text{also } s = o.$$

ad III. *Thes.* $o + y = 2 R$.

Dat. $AB \parallel CD$. Es ist $x + y = 2 R$. [§. 9. Zus. IV.],

da aber $x = o$ [I.] ist, so muß

$$\text{auch } o + y = 2 R. \text{ seyn.}$$

I. Zusatz. Schneidet EF die Parallelen so, daß ein Winkel ein rechter ist, so sind auch alle übrigen rechte.

II. Zusatz. Zwey Winkel, deren Schenkel je zwey und zwey parallel laufen, sind gleich, d. i. (Fig. 39.) $ACB = DFE$, wenn $AC \parallel DF$ und $BC \parallel EF$ ist; denn, zieht man durch F und C die Linie GF , so ist

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} o = n \\ x = y \end{array} \right\} \text{ [Lehrs. II.]}$$

Mithin $o + x = n + y$, oder $ACB = DFE$.

§. 35.

Lehrsatz. (Fig. 40.) Wenn zwey gerade Linien AB und CD , durch eine dritte EF geschnitten werden, so, daß

I. die Wechselwinkel, o und x , gleich sind, oder

II. der äussere s dem innern entgegengesetzten o gleich ist, oder, daß

III. die beyden innern, auf einer Seite liegenden, Winkel y und o zusammen $= 2 R.$ sind; so sind die Linien AB und CD parallel.

Beweis. ad I. *Thes.* $AB \parallel CD.$

Daten. $x = o.$ Man fälle GH senkrecht auf CD , und mache $IG = KH$, ziehe dann IK , so ist, da $KG = KG$,

$\triangle IGK \cong \triangle KGH$ [§. 18.], und daher $IK = GH$ [§. 18. *Zus.* II.], und $I = H = R.$

Daher $AB \parallel CD$ [§. 32.], denn beyde Linien haben gleiche Abstände IK und GH .

ad II. *Thes.* $AB \parallel CD.$

Dat. $s = o.$ Es ist aber $s = x.$ [§. 10. *Zus.*]

Also auch $o = x$, folglich $AB \parallel CD$ [I.].

ad III. *Thes.* $AB \parallel CD.$

Daten. $y + o = 2 R.$ Es ist aber auch $y + x = 2 R.$ [§. 9. *Zus.* IV.]

Mithin $y + o = y + x$ und $o = x$, folgl. $AB \parallel CD$ [I.].

I. *Zusatz.* Durch einen Punct G (Fig. 41.) gibt es zu CD nur eine Parallele; denn wäre z. B. ausser AB auch ab durch G parallel zu CD , so müßte, wenn man EF durch G zieht,

$y + BGF = 2 R. = y + bGF$ [§. 34. III.], mithin $BGF = bGF$ seyn, welches unmöglich ist.

II. *Zusatz.* Zwey gerade Linien, die zu einer dritten parallel sind, sind es auch unter sich, d. i. wenn (Fig. 41.) $AB \parallel CD$, und $KI \parallel CD$ ist, so muß, wenn man sie durch EF schneidet, $x = y$ und $z = y$ [§. 34. II.], folglich $x = z$, und daher $AB \parallel KI$ seyn [Lehrs. II.].

III. *Zusatz.* Wenn zwey gerade Linien, ab und CD , (Fig. 41.) von einer dritten EF geschnitten werden, und die Summe der innern, auf einer Seite liegenden, Winkel d. i. $GHD + HGb < 2 R.$ ist, so müssen sich ab und

CD , auf der Seite bey b und D , gehörig verlängert, schneiden. Denn, schnitten sie sich nicht, so müßten sie entweder auseinander gehen, oder parallel seyn. Zieht man, durch G , $AB \nparallel CD$, so ergibt sich, daßs ersteres unmöglich ist, da $BGH > bGH$, folglich bG zwischen GB und HD fällt. Auch das Letztere kann nicht Statt finden; denn sonst gäbe es durch G zwey Parallelen zu CD , (gegen den I. Zus.).

§. 36.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct G (Fig. 42.) zur Linie CD eine parallele zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von G nach CD die Linie GF , und trage den Winkel y , in G auf der entgegengesetzten Seite, an FG auf [§. 21. nro. 1.], so, daßs $o = y$ wird, und verlängere AG ; so ist $AB \nparallel CD$, gemäß §. 35. I.

§. 37.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke eine Seite verlängert, so ist der äussere Winkel so groß, als die Summe der beyden innern entgegengesetzten.

Beweis. (Fig. 43.) *Thes.* $ACD = x + y$.

Dat. Man ziehe durch C die Linie $CE \nparallel AB$, so ist $x = o$ [§. 34. I.], und auch $y = n$ [§. 34. II.].

Mithin $x + y = o + n = ACD$.

§. 38.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke ist die Summe aller Winkel $= 2 R$.

Beweis. (Fig. 30.) *Thes.* $y + z + x = 2 R$.

Dat. Man verlängere BC , so ist

$$\begin{aligned} y + z &= o \text{ [§. 37.]} \\ x &= x. \end{aligned}$$

Daher $y + z + x = o + x = 2 R$. [§. 9. Zus. IV.]

I. Zusatz. Wenn zwey Winkel eines Dreyeckes bekannt sind, so ist es auch der dritte. Im gleichschenkligen Dreyecke sind durch einen Winkel alle übrigen gegeben.

II. Zusatz. Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich sind, so sind es auch die dritten.

III. Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke sind die zwey Winkel an der Hypotenuse zusammen einem rechten gleich. Ist das rechtwinklige Dreyeck gleichschenkelig, so ist jeder Winkel an der Hypotenuse $\equiv \frac{1}{2} R$.

IV. Zusatz. Im gleichseitigen Dreyecke ist jeder Winkel $\equiv \frac{2}{3} R$.

§. 39.

Lehrsatz. Die Summe S aller Winkel eines jeden Vieleckes von n Seiten ist $(n-2) 2 R$, d. h. so viele Mahl $2 R$ als die, um 2 verminderte, Anzahl der Seiten ausdrückt.

Beweis. (Fig. 44.) *Thes.* $S \equiv [n-2] 2 R$.

Dat. Man ziehe in der Figur von einem Punkte M nach allen Ecken derselben gerade Linien, so entstehen so viele Dreyecke, als die Figur Seiten hat, d. i. n Dreyecke. Nun halten die Winkel von n Dreyecken zusammen $n \cdot 2 R \equiv 2 n R$ [§. 38.]. Es gehören aber die Winkel um M (welche $\equiv 4 R$ sind [§. 9. *Zus. VI.*]) nicht zum Polygone; sie müssen also, um die Polygons-Winkel allein zu erhalten, von obigen $2 n R$ abgezogen werden, und dann entsteht

$$S \equiv 2 n R - 4 R \equiv [n-2] 2 R.$$

I. Zusatz. In jedem Vierecke ist $S \equiv 4 R$, welchen Werth man erhält, wenn man in obiger Formel $n \equiv 4$ setzt.

II. Zusatz. Ist die Figur regulär, so ist jeder Winkel $A \equiv \frac{S}{n} \equiv \frac{n-2}{n} 2 R \equiv [1 - \frac{2}{n}] 2 R \equiv [2 - \frac{4}{n}] R$.

III. Zusatz. In allen geradlinigen Vielecken, von gleich vielen Seiten, sind die Summen aller Winkel immer gleich.

§. 40.

Aufgabe. (Fig. 45.) Am Ende A einer geraden Linie AB eine senkrechte zu errichten.

Auflösung. Man nehme in AB den Punkt E beliebig, und errichte über AE ein gleichschenkliges Dreyeck ACE [§. 17.], verlängere CE so, daß $DC \equiv CE$ wird, und ziehe AD , so ist diese auf AB senkrecht.

Beweis. Th. $DAB = R$.

Daten. $AC = CE = DC$ [Constr.]. Daher

$$\begin{array}{l} n = y \\ \text{und } o = x. \end{array} \quad [\S. 18, \text{Zus. IV.}]$$

$$\text{Mithin } \frac{n+o}{y+x} = \frac{y+x}{y+x}$$

Es ist aber $(n+o) + (y+x) = 2 R. [\S. 38.]$

Mithin auch $(n+o) + (n+o) = 2 R., \text{ oder}$

$$2 (n+o) = 2 R., \text{ also}$$

$$n+o = DAB = R.$$

IV. A b s c h n i t t.

Von den Eigenschaften der Parallelogramme.

§. 41.

Erklärungen. Ein Viereck heisst

1) ein *Parallelogramm*, wenn darin jede zwey gegenüberstehenden Seiten parallel sind. (Fig. 46. 47. 48. 49.)

a) Sind im Parallelogramme alle vier Seiten gleich und alle Winkel rechte, so heisst es ein *Quadrat*. (Fig. 46.)

b) Hat ein Parallelogramm vier gleiche Seiten und schiefe Winkel, so heisst es eine *Raute* oder *Rhombus*. (Fig. 47.)

c) Sind im Parallelogramme nur die gegenüberstehenden Seiten gleich, und alle Winkel rechte, so heisst es ein *Rechteck*. (Fig. 48.)

d) Ein Parallelogramm, worin nur die gegenüberstehenden Seiten gleich, und die Winkel schief sind, heisst ein *Rhomboid*. (Fig. 49). *)

2) ein *Trapez*, wenn darin nur zwey gegenüberstehende Seiten parallel sind. (Fig. 50.)

3) ein *Trapezoid*, wenn keine Seite zur andern parallel ist. (Fig. 51.)

*) Man benennt ein Parallelogramm dadurch, dass man zwey, an entgegengesetzten Winkel stehende, Buchstaben nennt. So bezeichnet man z. B. das Parallelogramm Figur 47. durch *AD*.

Zusatz. Quadrate sind congruent, wenn sie eine Seite, Rechtecke aber, wenn sie zwey zusammenstossende Seiten gleich haben; denn dann müssen sie, aufeinander gelegt, sich decken. Gleich grosse Quadrate haben gleiche Seiten.

§. 42.

Lehrsatz. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel gleich.

Beweis. (Fig. 52.)

Th. 1) $AB = CD$. 2) $AC = BD$. 3) $A = D$. 4) $B = C$.

Dat. $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ [§. 41. 1.]. Man ziehe die Diagonale CB , so ist

$$\left. \begin{array}{l} o = y \\ n = x \end{array} \right\} \text{ [§. 34. 1.]}$$

$$CB = CB.$$

Daher $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ [§. 31.], und

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AC = BD \end{array} \right\} \text{ [§. 18. Zus. II.]}$$

$$A = D.$$

Da $o = y$, und

$n = x$ ist, so ist auch

$$o + n = y + x, \text{ oder } ABD = ACD.$$

I. Zusatz. Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

II. Zusatz. Die Diagonale theilt jedes Parallelogramm in zwey congruente Dreyecke, und

III. Zusatz. jedes Dreyeck ist die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat; denn es ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD = \frac{1}{2} AD$. Beyde Dreyecke haben gleiche Grundlinien AB und CD , und gleiche Höhen mit AD , indem sie zwischen zwey Parallelen liegen. [§. 28. Zus. III. und §. 32.]

IV. Zusatz. Wenn in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter ist, so sind es auch die übrigen. Denn in Fig. 48. ist, wenn $A = R$, auch $D = R$ [Lehrs.]. Es ist aber auch $AB \parallel CD$, mithin $A + C = 2R$ [§. 34. III.], und, da $A = R$ ist, so muß auch $C = R$, mithin $B = C = R$ [Lehrs.] seyn.

§. 43.

Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die gegenüber-

stehenden Seiten gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. (Fig. 52.) Th. 1) $AB \parallel CD$, 2) $AC \parallel BD$.

Daten. $AB = CD$

$AC = BD$. Es ist auch, wenn man die Diagonale

zieht $CB = CB$.

Daher $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ [§. 20.], mithin nach §. 18.

Zus. II.

1) $o = y$ und daher $AB \parallel CD$
2) $x = n$ „ „ $AC \parallel BD$ [§. 35. 1.]

Zusatz. Sind in einem Vierecke bloß zwey gegenüberstehende Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm. Denn (Fig. 52.) wenn $AB =$ und $\parallel CD$ ist, so ist auch $o = y$ [§. 34. 1.]

$AB = CD$

$CB = CB$.

Also $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ [§. 18.], und daher
 $x = n$.

Mithin $AC \parallel BD$ [§. 35. 1.].

§. 44.

Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Winkel gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. (Fig. 52.) Th. 1) $AB \parallel CD$. 2) $AC \parallel BD$.

Daten. $A = D$
 $C = B$ } also $A + C = D + B$.

Es ist $A + C + D + B = 4 R$. [§. 39. Zus. I.]

oder $2 (A + C) = 4 R$ und

$A + C = 2 R$. Mithin

$AB \parallel CD$ [§. 35. III.].

Es ist auch $B + D = A + C$ also $= 2 R$. Da aber

$A = D$ ist, so muß

auch $B + A = 2 R$, und daher

$AC \parallel BD$ [§. 35. III.] seyn.

§. 45.

Aufgabe. (Fig. 47.) Aus zwey Seiten AC und CD , und dem eingeschlossenen Winkel C , ein Parallelogramm zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichne an CD den Winkel C [§. 21. 1.], und trage auf den andern Schenkel dieses Winkels AC auf. Aus D beschreibe man mit AC , und aus A mit CD Kreisbögen, und ziehe nach den Durchschnittspunct B die Linien AB und DB , so ist AD das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Da zwey Seiten gegeben sind, so sind dadurch auch die übrigen zwey bestimmt [§. 42.], und, weil nach der Construction $AB = CD$, dann $AC = BD$ ist, so muß nach §. 43. AD ein Parallelogramm seyn.

§. 46.

Lehrsatz. Zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie und gleiche Höhen haben (oder zwischen zwey Parallelen liegen), sind gleich.

Beweis. Hier ergeben sich 3 Fälle.

1. EF fällt zum Theile auf AB (Fig. 53.),
- II. es stößt an AB (Fig. 54.), oder
- III. es fällt ausserhalb AB (Fig. 55.).

ad I. *Thes.* $AD = CF$. (Fig. 53.),

Dat. $CD = CD$, $AF \parallel CD$.

Es ist $AB = CD = EF$. [§. 42.]
 $— EB = — EB$.

Also $AB — EB = EF — EB$, oder
 $AE = BF$. Auch ist
 $AC = BD$
 $EC = FD$ } [§. 42.]

Folgl. $\triangle ACE \cong \triangle BDF$. [§. 20.]

Trap. $ED = \text{Trap. } ED$. Mithin

$\triangle ACE + \text{Tr. } ED = \triangle BDF + \text{Trap. } ED$, oder
 $AD = CF$.

ad II. *Thes.* $AD = CF$. [Fig. 54.]

Dat. $CD = CD \parallel AF$.

Es ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD$
 $\triangle BCD \cong \triangle BDF$ } [§. 42. Zus. II.]

Also $\triangle ABC + \triangle BCD = \triangle BCD + \triangle BDF$, oder
 $AD = CF$.

ad III. *Theo.* $AD = CF$. [Fig. 55.]

Dat. $CD = CD \nparallel AF$.

Es ist $AB = CD = EF$ [§. 42.]

$BE = BE$.

Folgl. $AB + BE = EF + BE$, oder
 $AE = BF$. Es ist auch
 $AC = BD$ } [§. 42.]
 $CE = DF$ }

Mithin $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ [§. 20.]

$— \triangle BGE = — \triangle BGE$

$+ \triangle GCD = + \triangle GCD$.

Also $\triangle ACE - \triangle BGE + \triangle GCD = \triangle BDF - \triangle BGE + \triangle GCD$, oder $AD = CF$.

I. *Zusatz.* Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich (Fig. 56.), d. i. $AD = EH$, wenn $CD = GH$ und $AF \nparallel CH$ ist; denn, zieht man EC und FD , so ist

$AD = CF$ }
 und $CF = EH$. } [Lehrs.]

Folgl. $AD = EH$.

II. *Zusatz.* Dreyecke, von einerley oder gleichen Grundlinien und gleichen Höhen, sind gleich; denn sie sind nach §. 42. *Zus. III.* Hälften von Parallelogrammen, die mit ihnen einerley oder gleiche Grundlinien und Höhen haben, und was für die Ganzen gilt, gilt auch für die Hälften.

III. *Zusatz.* Mehrere Dreyecke von gleichen Höhen sind zusammen einem Dreyecke gleich, welches dieselbe Höhe, und die Summe aller Grundlinien jener Dreyecke zur Basis hat; d. i. (Fig. 57.)

$\triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFG = \triangle ABG$, wenn $AF \nparallel BG$, und $BG = BC + CE + EG$ ist. Denn

$\triangle ABC = \triangle ABC$

$\triangle CDE = \triangle ACE$ }

$\triangle EFG = \triangle AEG$. } [Zus. II.]

Also $\triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFG = \triangle ABC + \triangle ACE + \triangle AEG = \triangle ABG$.

IV. *Zusatz.* (Fig. 58,) Ein Dreyeck ABC ist so groß als ein Parallelogramm AE oder DF , das mit ihm

dieselbe Höhe, aber nur die halbe Grundlinie hat; denn, da $CF \parallel AB$ und $BF \parallel AC$ ist, so ist

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AF \text{ [§. 42. Zus. III.]}$$

$$\text{Nun ist } AE = DF = \frac{1}{2} AF \text{ [Zus. I.]}$$

$$\text{Mithin } \triangle ABC = AE = DF.$$

§. 47.

Aufgaben. 1) Ein Parallelogramm in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile eine Seite in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte Parallelen zu einer, an die getheilte Seite anliegenden, Seite des Parallelogramms. Dann müssen die dadurch entstandenen kleinern Parallelogramme gleich seyn [§. 46. Zus. I.].

2) Ein Dreyeck in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile eine Seite des Dreyeckes in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und ziehe von der gegenüberstehenden Spitze nach allen Theilungspuncten gerade Linien, so sind die kleinern Dreyecke einander gleich [§. 46. Zus. II.].

§. 48.

Lehrsatz. Wenn man durch einen Punct der Diagonale eines Parallelogrammes, zu zwey aneinanderliegenden Seiten desselben, zwey Parallelen zieht, so erhält man vier Parallelogramme, wovon jene, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich sind. (Man nennt letztere Ergänzungen an der Diagonale).

Beweis. (Fig. 59.) *Thes.* $AI = ID$.

Daten. $AB \parallel GH \parallel CD$; $AC \parallel EF \parallel BD$.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } \triangle ABC \cong \triangle BCD \\ \triangle EIB \cong \triangle HIB \\ \triangle IGC \cong \triangle ICF. \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{[§. 42. Zus. II.]} \\ \text{Daher} \end{array}$$

$$\triangle ABC - \triangle EIB - \triangle IGC = \triangle BCD - \triangle HIB - \triangle ICF, \\ \text{oder } AI = ID.$$

§. 49.

Erklärungen. Eine Figur *verwandeln* heisst, aus ihr eine andere Figur machen, die der erstern gleich ist, ohne mit ihr congruent zu seyn.

Aufgaben. 1) (Fig. 55.) Ein Parallelogramm AD in ein anderes verwandeln, das einen gegebenen Winkel MNO hat.

Auflösung. Man construiere an die Grundlinie CD den gegebenen Winkel $ECD = MNO$ [§. 21. 1.]. Durch D ziehe man $DF \nparallel CE$, und verlängere AB bis sie CE und DF schneidet, dann ist CF das verlangte Parallelogramm [§. 46.].

2) (Fig. 60.) Ein Dreyeck ACD in ein anderes mit einem gegebenen Winkel a zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe durch A eine parallele zur Grundlinie CD , mache $BCD = a$ [§. 21. 1.], und ziehe BD , so ist das $\triangle BCD$ das verlangte Dreyeck [§. 46. Zus. II.].

3) (Fig. 59.) Ein Parallelogramm DI in ein anderes verwandeln, das eine gegebene Seite mn hat.

Auflösung. Man verlängere DF so, daß $CF = mn$ wird, ziehe CI , welche, verlängert, die Verlängerung von DH in B schneidet. Durch C ziehe man zu BD , und durch B zu CD Parallelen, die sich in A schneiden. Verlängert man endlich IH und FI , so ist AI das verlangte Parallelogramm mit der gegebenen Seite $GI = CF = mn$ [§. 48.].

4) Ein Dreyeck in ein Parallelogramm mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle nach §. 46. Zusatz IV. das Dreyeck in ein Parallelogramm, und dieses nach der 3ten Aufgabe in ein anderes mit der gegebenen Seite.

5) Ein Parallelogramm in ein Dreyeck zu verwandeln, das eine gegebene Seite hat.

Auflösung. Man verwandle nach der 3ten Aufgabe das gegebene Parallelogramm in ein anderes, das die Hälfte der gegebenen Seite des Dreyeckes zur Grundlinie hat; dann verdopple man diese, und ergänze das Dreyeck [§. 46. Zus. IV.].

I. Zusatz. Man kann jedes Parallelogramm und jedes Dreyeck in ein Rechteck verwandeln. [1. Aufg. und §. 46. Zusatz IV.].

II. Zusatz. Jede geradlinige Figur läßt sich in ein Dreyeck verwandeln. Man schneide nämlich in der ge-

gegebenen Figur durch eine Diagonale ein Dreyeck ab; durch die Spitze desselben ziehe man mit der Diagonale eine Parallele, verlängere eine, an die Diagonale anstossende, aber nicht zu obigem Dreyecke gehörige, Seite der Figur, bis sie die Parallele trifft, und ziehe von diesem Punkte eine gerade Linie bis zu dem anderen Endpunkte der Diagonale. Dadurch erhält man ein neues Dreyeck, das dem abgeschnittenen gleich ist [§. 46. Zusatz II.]. Setzt man dieses neue Dreyeck an die Stelle des alten, so bleibt die Gröfse der Figur ungeändert; diese hat aber um *eine* Ecke weniger. Dieses Verfahren, lange genug wiederholt, gibt am Ende ein Dreyeck, das der gegebenen Figur gleich ist.

§. 50.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der beyden Katheten gleich.

Beweis. (Fig. 61.) *Thes.* $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Daten. $ABC = R$. Man construire aus jeder Seite des Dreyeckes ein Quadrat, fälle aus B auf die Hypotenuse AC die Senkrechte LB , und verlängere sie bis K ; dann ist $BK \parallel AH$ [§. 35. III.], und es sind AK und KC Parallelogramme [§. 41. 1.].

Nun hat man zu zeigen, dafs

$$1) AB^2 = AK \text{ und}$$

$$2) BC^2 = KC \text{ ist.}$$

ad 1) Man ziehe BH und CD , dann HL und BD , so ist:

$$x = y = R. [\S. 41. a.]$$

$$o = o,$$

$$\text{folgl. } x + o = y + o, \text{ oder}$$

$$DAC = BAH. \text{ Auch}$$

$$\text{ist } \left. \begin{array}{l} AC = AH \\ AD = AB \end{array} \right\} [\S. 41. a.]$$

$$\text{Mith. } \triangle DAC \cong \triangle ABH [\S. 18.]$$

$$\text{Es ist aber } \triangle DAC = \triangle DAB = \frac{1}{2} AB^2 \quad \left. \begin{array}{l} [\S. 46. \text{Zus. II.}] \\ \text{und } \triangle ABH = \triangle AHL = \frac{1}{2} AK \end{array} \right\} \text{u. } [\S. 42. \text{Z. III.}]$$

$$\text{Daher auch } \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} AK \text{ und } AB^2 = AK.$$

ad 2) Man ziehe BI und AG , dann LI und BG : so

läßt sich auf dieselbe Art, wie bey Nro. 1., zeigen, daß $BC^q = KC$ ist.

Da nun $AB^q = AK$ und

$BC^q = KC$ ist, so muß

$$AB^q + BC^q = AK + KC = AC^q \text{ seyn. *)}$$

I. Zusatz. Aus der Gleichung $AB^q + BC^q = AC^q$ ist auch $AB^q = AC^q - BC^q$, d. h. das Quadrat aus einer Kathete ist dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem der andern Kathete gleich.

II. Zusatz. Wenn in einem Dreyecke ABC (Fig. 62.) $BC^q = AB^q + AC^q$ ist, so muß es rechtwinklig, d. i. $BAC = R.$, seyn. Denn errichtet man in A auf AC die Senkrechte $AD = AB$, so ist, da $CAD = R$ ist, wenn man CD zieht,

$$CD^q = AD^q + AC^q$$

$$= AB^q + AC^q = BC^q, \text{ und daher auch}$$

$$CD = BC \text{ [§. 41. Zus.]. Es ist auch}$$

$$AC = AC$$

$$AD = AB \text{ [Construction].}$$

Mithin $\triangle ACD \cong \triangle ABC$ [§. 20.], und also

$$BAC = DAC = R.$$

§. 51.

Aufgaben. 1) (Fig. 63.) Zwey, oder mehrere, Quadrate in eines verwandeln, das so groß ist als jene zusammen genommen.

Auflösung und Beweis. Man construire einen rechten Winkel MNO , mache $NP = a$, $NQ = b$, und ziehe PQ , so ist

$$PQ^q = NP^q + NQ^q \text{ [§. 50.]}$$

$$= a^q + b^q.$$

Macht man $NR = PQ$ und $NS = c$, so ist, wenn man RS zieht, $RS^q = NR^q + NS^q$,
oder $RS^q = PQ^q + c^q = a^q + b^q + c^q$.

2) Die Seite eines Quadrates zu finden, das doppelt so groß ist, als ein gegebenes.

*) Dieser Satz heißt, von seinem Erfinder Pythagoras, der Pythagorische Lehrsatz, und ist eine reiche Quelle, woraus die wichtigsten Wahrheiten für die Geometrie fließen.

Auflösung und Beweis. (Fig. 64.) Man nehme die Diagonale des gegebenen Quadrates; denn es ist

$$AB^q = AC^q + CB^q \text{ [§. 50.], oder} \\ = a^q + a^q = 2 a^q.$$

3) Die Seite eines Quadrates finden, welches der Differenz zweyer gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung und Beweis. (Fig. 65.) Man construiere einen rechten Winkel MNO , und mache $NP = b$, beschreibe dann aus P mit a einen Kreisbogen der MN in Q schneidet, so ist, wenn man QP zieht,

$$NQ^q = QP^q - NP^q \text{ [§. 50. Zus. I.] } \\ = a^q - b^q.$$

4) Die Seite eines Quadrates zu finden, das der Hälfte eines gegebenen gleich ist.

Auflösung und Beweis. (Fig. 66.) AD sey das gegebene Quadrat, und jede Seite davon a . Man halbire BC , und nehme die halbe Diagonale EC , so ist diese die verlangte Seite; denn es ist, wenn man ED zieht,

$$\left. \begin{aligned} n &= R. \\ x &= \frac{1}{2} CDB = \frac{1}{2} R. \end{aligned} \right\} \text{ [§. 23. Zus. I.]}$$

Es muß also auch $o = \frac{1}{2} R$. [§. 38. Zus. III.] und daher

$$CE = ED \text{ [§. 19.] seyn. Und da auch} \\ CD^q = CE^q + ED^q \text{ [§. 50.] } \\ = CE^q + CE^q = 2 CE^q \text{ ist, so muß} \\ \frac{1}{2} CD^q = CE^q \text{ seyn.}$$

V. A b s c h n i t t.

Von der Lage und Gröfse der geraden Linien in Bezug auf den Kreis.

§. 52.

Lehrsatz. (Fig. 67.) Jede gerade Linie CD , die auf dem Endpuncte A des Radius AB senkrecht steht, ist eine Tangente [§. 13. a.].

Beweis. Man nehme in CD den beliebigen Punct E , und ziehe BE , so ist $BE > AB$ [§. 28. Zusatz II.

da $BAE = R$ ist], mithin liegt E auſserhalb des Kreiſes; d. h. jeder Punct von CD , A ausgenommen, liegt auſserhalb des Kreiſes. Es iſt daher CD eine Tangente [§. 13. a.].

Zuſatz. Der Radius AB , den man an den Berührungspunct A der Tangente CD zieht, ſteht auf ihr ſenkrecht; denn wäre dieſs nicht, ſo müſte eine andere gerade Linie z. B. BE von B auf CD ſenkrecht fallen, und dann wäre $BE < AB$ [§. 28. *Zus. III.*], gegen die Natur der Tangente, indem dann E in die Kreisfläche fallen müſte.

§. 53.

Erklärung. Man ſagt ein Kreis iſt 1) *um* eine Figur beſchrieben, wenn ſein Umkreis durch alle Winkelſpitzen der Figur geht; 2) *in* einer Figur beſchrieben, wenn er alle Seiten derſelben berührt.

§. 54.

Aufgabe. Durch drey gegebene Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beſchreiben.

Auflöſung. (Fig. 68.). Man verbinde die drey gegebenen Puncte durch zwey gerade Linien, welche als Sehnen erſcheinen, wenn der Kreis durch obige drey Puncte geht. Man errichte daher in der Mitte der beyden Linien AB und AC , auf dieſe, ſenkrechte, wo dieſe ſich ſchneiden (F .) iſt der Mittelpunct des verlangten Kreiſes.

Beweis. Der Mittelpunct liegt in beyden Perpendikeln, gemäß §. 24. *Zus. I.*, und weil dieſe nur *einen* Punct F gemein haben [§. 5. *Zw. II.*], ſo iſt dieſer der Mittelpunct. Man braucht nur noch zu zeigen, daß DF und EF ſich ſchneiden müſſen. Man ziehe DE . Da

$$ADF = R = AEF \text{ iſt, ſo muß}$$

$$EDF < R, \text{ und auch}$$

$$DEF < R,$$

mithin $EDF + DEF < 2 R$ ſeyn, folglich müſſen ſich DF und EF ſchneiden [§. 35. *Zus. III.*].

Zuſatz. Wie obige Aufgabe löſt man auch folgende:

1) Den Mittelpunct eines Kreiſes zu ſuchen.

2) Um ein Dreyeck einen Kreis zu beſchreiben [§. 53.].

§. 55.

Aufgabe. In einem Dreyecke einen Kreis zu beschreiben. [§. 53.]

Auflösung. (Fig. 69). Man halbire zwey Winkel des Dreyeckes. In D , wo sich die Halbirungs-Linien schneiden, ist der Mittelpunkt, und die senkrechte DE , von D auf eine Seite des Dreyeckes, der Radius des verlangten Kreises.

Beweis. Da $B + C < 2R$ [§. 27.] ist, so muß auch $\frac{1}{2}(B + C) < 2R$ d. i. $m + n < 2R$ seyn; folglich schneiden sich die Halbirungslinien [§. 35. Zus. III.]. Man fälle von D auch auf AB und AC Senkrechte, so ist:

$$o = n \text{ [Constr.]}$$

$$BD = BD$$

$$x = y = R.$$

Folgl. $\triangle BFD \cong \triangle BDE$. [§. 31.]

Daher $FD = DE$ [§. 18. Zus. II.].

Auch ist $m = z$ [Constr.]

$$DC = DC$$

$$u = v = R.$$

Also $\triangle DEC \cong \triangle DGC$ [§. 31.],

und $DG = DE$ [§. 18. Zus. II.].

Daher sind $FD = DE = DG$ Radien des Kreises, auf welchen die Seiten des Dreyeckes senkrecht stehen, folglich Tangenten sind. [§. 52.],

§. 56.

Erklärungen. (Fig. 70.). Der Winkel, der seinen Scheitel im Mittelpuncte eines Kreises hat, heisst *Centralwinkel*, z. B. DEF ; hat er aber den Scheitel in der Peripherie, so heisst er *Peripherie-Winkel* z. B. ABC . Man sagt, sie ruhen auf den Bogen, die zwischen ihren Schenkeln liegen. So ruht z. B. DEF auf DF und ABC auf AC .

§. 57.

Lehrsatz. In Kreisen von gleichen Radien gehören zu gleichen Centralwinkeln gleiche Sehnen, Bogen, Aus- und Abschnitte.

Beweis. (Fig. 71.). *Thes. 1)* $AB = ab$.

2) Bog. $AB = \text{Bog. } ab$. 3) Sector $ACB = \text{Sect. } acb$.

4) Segm. $ADB = \text{Segm. } adb$.

Daten. Es ist $ACB = acb$.

$$AC = ac$$

$$CB = cb.$$

Mithin $\triangle ACB \cong \triangle acb$ [§. 18.], und
 $AB = ab$ [§. 18. Zus. II.].

Man lege C auf c , und CA längst ca , so muß, da $\triangle ACB \cong \triangle acb$ ist, das $\triangle ABC$ auf das $\triangle abc$, ferner jeder Punct D vom Bogen ADB auf einen Punct d des Bogens adb fallen, folglich decken sich auch die Bogen, Abschnitte und Ausschnitte, und sind also congruent.

I. Zusatz. In einem Kreise gehören zu gleichen Centralwinkeln gleiche Sehnen, Bogen, Aus- und Abschnitte.

II. Zusatz. In einem Kreise, oder in mehrern Kreisen mit gleichen Radien gehören zu gleichen Sehnen gleiche Centralwinkel und Bogen, gleiche Aus- und Abschnitte. Denn, wenn $AB = FG = ab$ ist, so muß $\triangle ABC \cong \triangle CFG \cong \triangle abc$ [§. 20.], mithin $ACB = GCF = acb$ seyn, woraus dann gemäß des Lehrsatzes und des *I. Zusatzes* das Uebrige folgt. Auch ergiebt sich, daß die Senkrechten IC , CH und ch gleich sind, d. h. daß gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpuncte abstehen und umgekehrt; denn es ist

$$GI = AH = ah \quad [\text{§. 30. Zus. IV.}]$$

$$GIC = AHC = ahc = R.$$

$$\text{und } GC = AC = ac.$$

Daher $\triangle IGC \cong \triangle AHC \cong \triangle ahc$, [§. 30. Zus. II.], also
 $IC = CH = ch$, etc.

III. Zusatz. Zu gleichen Bogen gehören in gleichen Kreisen gleiche Sehnen; denn zu gleichen Bogen gehören gleiche Centralwinkel, und gleiche Centralwinkel haben gleiche Sehnen [Lehrs.].

IV. Zusatz. Eine gerade Linie CH , die den Centralwinkel halbirt, halbirt auch die Sehne, den Bogen, den Aus- und Abschnitt; denn daß $AH = HB$ ist, folgt

aus §. 23. IV. Zus.; und weil $o = n$ ist, liegt das Uebri-
ge im I. Zus.

V. Zusatz. Zwey senkrecht sich schneidende Durch-
messer theilen die Peripherie und den Kreis in vier con-
gruente Theile; man nennt sie *Quadranten*.

VI. Zusatz. Um einen Bogen ADB zu halbiren,
halbire man den, zum Bogen gehörigen, Centralwinkel
durch CD , [§. 21. 2.]; dann ist auch Bog. $AD =$ Bog.
 BD , indem $o = n$ [Zus. I.] ist.

§. 58.

Lehrsatz. Der Centralwinkel ist doppelt so groß als
der Peripherie - Winkel, der mit ihm auf demselben Bo-
gen ruht.

Beweis. Es ergeben sich hier drey Fälle. Es fällt
nämlich der Mittelpunkt entweder

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) in einen Schenkel, oder | } des Peripherie-
Winkels. |
| 2) zwischen beyde Schenkel, | |
| 3) oder ausser beyde Schenkel | |

ad 1) (Fig. 72.) *Thes.* $o = 2x$.

Daten. $BC = BD$, folgl. $x = y$ [§. 18. Zus. IV.].

Es ist aber $o = x + y$ [§. 37.], mithin
auch $o = 2x$.

ad 2) (Fig. 73.) *Thesis.* $ADC = 2ABC$.

Daten. Man ziehe den Diameter BE , so ist

$$y = 2p \text{ [1.]}$$

$$z = 2x \text{ [1.]}$$

Also $y + z = 2p + 2x = 2[p + x]$, oder
 $ADC = 2ABC$.

ad 3) (Fig. 74.) *Thes.* $o = 2x$.

Daten. Man ziehe den Diameter BE , so ist

$$EDC = 2EBC \text{ [1.]}$$

$$m = 2n \text{ [1.]}$$

Mithin $EDC - m = 2EBC - 2n = 2[EBC - n]$,
oder $o = 2x$.

I. Zusatz. (Fig. 75.) Alle Peripherie - Winkel x , die
auf demselben Bogen CD ruhen, sind gleich; denn jeder
gleichet dem halben Centralwinkel o [Lehrs.].

II. Zusatz. Peripherie - Winkel, die in gleich gros-

sen Kreisen auf gleich großen Bogen ruhen, sind gleich; denn sie sind Hälften zweyer gleichen Centralwinkel.

III. Zusatz. (Fig. 75.) Jeder Peripherie-Winkel m , der auf dem Halbkreise oder Diameter ruht, ist ein rechter; denn $m = \frac{1}{2} AKB$ [Lehrs.]
 $= \frac{1}{2} [2 R.]$ [§. 9. Zus. III.]
 $= R.$

Diesem gemäß kann man am Ende der Linie AE , ohne sie über E zu verlängern eine senkrechte EB errichten. Um z. B. (Fig. 45.) in A auf AB eine Senkrechte zu errichten, wähle man oberhalb AB in der Nähe von A den Punct C , und beschreibe mit AC aus C einen Kreis, der AB in E schneidet. Zieht man nun EC und verlängert sie bis an den Kreisbogen nach D , so ist die von A nach D gezogene gerade Linie die verlangte senkrechte; denn es ist, diesem Zusatze gemäß, $DAE = R.$

IV. Zusatz. (Fig. 76.) Die Summe der 2 gegenüberstehenden Winkel eines jeden Viereckes im Kreise ist $= 2 R.$ Denn $A = \frac{1}{2}$ hohl BED , [Lehrs.]
 $C = \frac{1}{2}$ erhaben $BED.$

$$\begin{aligned} \text{Mithin } A + C &= \frac{1}{2} [\text{hohl } BED + \text{erh. } BED] \\ &= \frac{1}{2} [4 R.] \quad [\S. 9. \text{Zus. VI.}] \\ &= 2 R. \end{aligned}$$

Eben so läßt sich zeigen, daß $B + D = 2 R$ ist.

§. 59.

Lehrsatz. Jeder Winkel, den an der Peripherie eine Sehne mit einer Tangente bildet, ist einem Peripherie-Winkel gleich, der auf dem Bogen ruht, den die Sehne zwischen sich und der Tangente abschneidet.

Beweis. (Fig. 77.) Man ziehe den Diameter BE und auch EC , so ist

$$\text{Thes. } x = y.$$

$$\text{Daten. Denn es ist } x + o = R. \quad [\S. 52. \text{Zus.}]$$

$$o + y = R. \quad [\S. 38. \text{Zus. III.}]$$

$$\text{Also } x + o = o + y \text{ und}$$

$$x = y.$$

Zusatz. Dasselbe gilt auch für den stumpfen Winkel $FBC = m.$

Denn $FBC + x = 2 R$ [§. 9. Zus. IV.]
 $y + m = 2 R$. [§. 58. Zus. IV.]

Mithin $FBC + x = y + m$ und
 da $x = y$ [Lehrs.], so ist auch
 $FBC = m$.

§. 60.

Lehrsatz. Wenn zwey Secanten [§. 13. a.] ausserhalb des Kreises sich schneiden, so ist der Winkel, den sie bilden, dem Unterschiede zweyer Peripherie-Winkel gleich, die auf den beyden Bogen ruhen, welche die Secanten zwischen sich abschneiden.

Beweis. (Fig. 78.) Man ziehe DC , so ist

Thes. $x = o - n$.

Daten. Denn es ist $x + n = o$ [§. 37.], woraus
 $x = o - n$ ist.

Zusatz. Schneiden sich zwey Sehnen im Kreise, so ist der dadurch entstehende Winkel m gleich der Summe zweyer Peripherie - Winkel, die auf den Bogen ruhen, welche die Schenkel des Winkels, rückwärts und vorwärts verlängert, zwischen sich abschneiden, d. i., wenn man DC zieht, $m = o + y$ [§. 37.].

§. 61.

Aufgabe. Eine Tangente zu ziehen

a) durch einen gegebenen Punct in der Peripherie A (Fig. 79.).

Auflösung. Man ziehe den Radius AB , und errichte in A auf AB die Senkrechte AC [§. 40. oder §. 58. Zus. III.], welche dann die Tangente ist [§. 52.].

b) durch einen gegebenen Punct C ausserhalb des Kreises. (Fig. 79.)

Auflösung. Man ziehe BC , halbire sie in D , und beschreibe einen Kreis mit DB . Zieht man nun AC oder EC , so sind diese Tangenten; denn $BAC = R = BEC$ [§. 58. Zus. III. und §. 52.]. Es giebt also in diesem Falle 2 Tangenten.

§. 62.

Lehrsatz. Wenn die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile getheilt ist, und man durch alle Theilungs-

Puncte der Ordnung nach Sehnen zieht, so erhält man ein, im Kreise beschriebenes, reguläres n Eck. [§. 53. 1.]

Beweis. (Fig. 80.) Da alle Bogen gleich sind, so sind es auch die Sehnen [§. 57. Zus. III.], oder die Seiten der Figur. Alle Polygons - Winkel stehen auf $n - 2$ solchen gleichen Bogen, sind also gleich [§. 58. Zus. II.], und die Figur ist regulär [§. 12. b.].

Zusatz. Um in einem Kreise ein reguläres Viereck zu beschreiben, errichte man (Fig. 81.) zwey Diameter aufeinander senkrecht, und ziehe die Sehnen AC , CB , BD und DA . [§. 57. Zus. V.]. Halbirt man jeden Centralwinkel dieses regulären Viereckes $ACBD$, und zieht man die Sehnen zu den halben Bogen, so erhält man ein reguläres Achteck, und, setzt man dieses Verfahren fort, ein reguläres Sechzehneck, Zweyunddreysigeck etc.

§. 63.

Lehrsatz. Wenn man in einem regulären Polygone zwey Winkel an einer Seite halbirt, so ist der Durchschnittspunct der Halbirungslinien

- | | |
|---------------------|-------------|
| 1) von allen Ecken | } der Figur |
| 2) von allen Seiten | |

gleichweit entfernt, und er heisst der *Polygons - Mittelpunct*.

Beweis. (Fig 80.) Da sowohl A als $B < 2 R$ ist, so ist auch $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B < 2 R$; mithin müssen AG und BG sich schneiden [§. 35. Zus. III.]. Es ist $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B$ [verm. Voraussetz.] oder $a = n$, folglich auch $BG = AG$ [§. 19.]. Zieht man GC , GD , GE und GF , so ist

$$AB = BC$$

$$BG = BG$$

$$n = x = \frac{1}{2} B.$$

Also $\triangle ABG \cong \triangle BCG$ [§. 18.]

und $AG = CG = BG$.

Auf ähnliche Art läst sich zeigen, dafs auch GD , GE und GF der Linie AG gleich sind. Es steht also G von allen Ecken der Figur gleichweit ab. Dafs G auch von den Seiten (Sehnen) gleichweit abstehe ergibt sich aus dem Ende des II. Zusatzes §. 57.

I. Zusatz. Wenn man in einem regulären Polygone vom Polygons - Mittelpunkte an alle Ecken der Figur gerade Linien zieht, so wird dadurch das Polygon in so viele congruente Dreyecke getheilt, als es Seiten hat, und jeder Polygons - Winkel wird halbirt. Auch erhält man um den Polygons - Mittelpunkt so viele gleiche Winkel, als die Figur Seiten hat, welche *Centralwinkel des Polygons* heißen. Jeder davon ist $= \frac{4}{n} R$, wenn n die Zahl der Seiten ausdrückt.

II. Zusatz. Jedes reguläre Polygon ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie der Perimeter des Polygons und dessen Höhe die Senkrechte vom Polygons - Mittelpunkte auf eine Seite des Polygons ist, d. h. (Fig. 80.) $\triangle BGK = ABCDEF$, wenn $BK = 6 BC$ ist [§. 46. *Zus. III.*]. Denn es ist

$$\triangle BGK = 6 \triangle BGC = ABCDEF.$$

§. 64.

Aufgabe. Um jedes reguläre Polygon und in jedem regulären Polygone einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. (Fig. 80.) Man halbire zwey Winkel an einer Seite z. B. A und B , so ist GB der Radius des Kreises um das reguläre Polygon, und die Senkrechte GH der Radius des Kreises im regulären Polygone.

Der Beweis beruht auf §. 63. und §. 53.

§. 65.

Lehrsatz. Die Seite eines regulären Sechseckes ist dem Radius des, darum beschriebenen, Kreises gleich.

Beweis. (Fig. 80.) *Thes.* $AG = AB$.

Daten. Im $\triangle ABG$ ist $AG = GB$, mithin $o = n$ [§. 18. *Zus. IV.*].

Es ist $AGB = \frac{4}{6} R = \frac{2}{3} R$ [§. 63. *Zus. I.*].

Mithin $o + n = 2 R - AGB$ [§. 38.]

$$= 2 R - \frac{2}{3} R$$

$$= \frac{4}{3} R, \text{ oder}$$

$$2 n = \frac{4}{3} R, \text{ und}$$

$$n = \frac{2}{3} R = AGB, \text{ mithin auch}$$

$$AG = AB. \text{ [§. 19.]}$$

I. Zusatz. Will man ein reguläres Sechseck in einem Kreise construiren, so darf man bloß den Radius des Kreises sechs Mal auf der Peripherie auftragen, und die Sehnen ziehen.

II. Zusatz. Halbirt man jeden Centralwinkel des regulären Sechseckes, und zieht die zu den halben Bogen gehörigen Sehnen, so erhält man ein reguläres Zwölfeck; und, setzt man dieses Verfahren fort, so entsteht ein reguläres Vierundzwanzigeck, Achtundvierzigeck etc. [§. 62.]

III. Zusatz. Zieht man (Fig. 80.) im regulären Sechsecke die Sehnen AC , AE und EC für die doppelten Bogen, so erhält man ein reguläres Dreyeck im Kreise, d. i. $\triangle AEC$. [§. 62.]

§. 66.

Lehrsatz. Der Unterschied, zwischen dem halben Bogen und seiner Sehne, ist kleiner als der halbe Unterschied, zwischen dem ganzen Bogen und der dazu gehörigen Sehne.

Beweis. (Fig. 82.)

Thesis. Bogen $AC - AC < \frac{1}{2}$ [Bog. $AB - AB$].

Daten. Bogen $AC = \frac{1}{2}$ Bogen AB .

Man ziehe CB , so ist

$$AC = CB \quad [\text{§. 57. Zus. III.}]$$

$$\text{und } AC + CB > AB \quad [\text{§. 15.}],$$

$$\text{oder } 2 AC > AB \quad \text{und}$$

$$AC > \frac{1}{2} AB; \text{ dieß von dem Ausdrücke,}$$

$$\text{Bogen } AC = \frac{1}{2} \text{ Bog. } AB, \text{ subtrahirt, gibt}$$

$$\text{Bogen } AC - AC < \frac{1}{2} \text{ Bog. } AB - \frac{1}{2} AB$$

$$< \frac{1}{2} [\text{Bog. } AB - AB].$$

I. Zusatz. Der Umfang eines regulären Polygons von $2n$ Seiten weicht weniger von der Peripherie des umschriebenen Kreises ab, als der eines regulären Polygons von n Seiten. Da man nun die Anzahl der Seiten eines regulären Vieleckes unendlich verdoppeln kann [§. 65. *Zus. II.*], so ergibt sich, daß der Kreis als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten zu betrachten ist.

II. Zusatz. Der Kreis ist einem Dreyecke gleich,

dessen Grundlinie seine Peripherie und dessen Höhe der Radius ist. [§. 63. Zus. II.]

III. Zusatz. Der Kreis-Sector [§. 13. c.] ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie der Bogen, und dessen Höhe der Radius ist [II. Zus. und §. 46. Zus. III].

VI. A b s c h n i t t.

Von den Verhältnissen der Linien, und von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 67.

Erklärung. Messen heisst angeben, wie oft eine bestimmte Grösse (Mafs) in einer andern gegebenen enthalten ist, oder bestimmen, in welchem Verhältnisse die zu messende Grösse zum Mafse steht.

Linien und Flächen stehen nur in so ferne in einem Verhältnisse, als sie gezählte Grössen sind, d. h. als ihre Quantitäten, durch ein gemeinschaftliches Mafs in Zahlen, bestimmt sind.

§. 68.

Lehrsatz. Dreyecke von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Beweis. (Fig. 83.)

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF$.

Daten. $AG = DH$. Man wähle eine Länge Bb , mit der sich sowohl BC als EF genau messen lässt [§. 67.], so wird sich finden, dass Bb auf BC , m , und auf EF , n Mahl aufgetragen werden kann, folglich

$$BC : EF = m. Bb : n. Bb = m : n$$

Es ist also durch das Auftragen von Bb die Linie BC in m und EF in n , unter sich gleiche, Theile getheilt. Zieht man nun von diesen Theilungspuncten nach den Spitzen der Dreyecke gerade Linien, so erhält man im $\triangle ABC$ m und im $\triangle DEF$ n kleinere Dreyecke, die, weil sie gleiche Grundlinien und Höhen haben, unter sich gleich sind.

Daher ist $\triangle ABC : \triangle DEF = m : n$. Est ist aber auch $BC : EF = m : n$, folglich

$$\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF.$$

Ist das Verhältniß $m : n$ nicht rational, so nehme man die Länge Bb so klein an, als nöthig ist, um sich dem rationalen Verhältnisse so viel möglich zu nähern. [Arithm.].

Zusatz. Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien. [§. 42. *Zus. III.*] Was für die Hälften gilt, gilt auch für die Ganzen.

§. 69.

Lehrsatz. Dreyecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. (Fig. 84.)

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = AG : DH$.

Daten. $BC = EF$. Man errichte in E auf EF eine Senkrechte, und mache $IE = DH$ und $KE = AG$, ziehe dann IF und KF , so ist: $\triangle KEF = \triangle ABC$ und $\triangle IEF = \triangle DEF$ [§. 46. *Zus. II.*]. Betrachtet man nun die Dreyecke KEF und IEF , und nimmt man IE und KE als ihre Grundlinien an, so haben sie gleiche Höhe EF , und es ist

$$\begin{aligned} \triangle KEF : \triangle IEF &= KE : IE \quad [\text{§. 68.}], \text{ oder} \\ \triangle ABC : \triangle DEF &= AG : DH. \end{aligned}$$

Zusatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. [§. 42. *Zus. III.*].

§. 70.

Lehrsatz. Alle Dreyecke verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Beweis. (Fig. 85.)

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = BC \cdot AG : EF \cdot DH$.

Daten. Man errichte $IB = DH$ senkrecht auf BC , und ziehe IC , so ist

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle IBC &= AG : IB \quad [\text{§. 69.}] \\ \triangle IBC : \triangle DEF &= BC : EF. \quad [\text{§. 68.}] \end{aligned}$$

Daher $\triangle ABC \cdot \triangle IBC : \triangle IBC \cdot \triangle DEF = AG \cdot BC : IB \cdot EF$.
oder $\triangle ABC : \triangle DEF = BC \cdot AG : EF \cdot DH$.

Zusatz. Alle Parallelogramme verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen. [§. 42. *Zus. III.*]

§. 71.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so stehen die abgeschnittenen Stücke der Seiten unter sich und mit den Ganzen in Proportion.

Beweis. (Fig. 86.)

Thes. 1) $AD : DB = AE : EC$.

2) $AB : AD = AC : AE$.

3) $AB : DB = AC : EC$.

Daten. $DE \parallel BC$.

ad 1) Man ziehe BE und DC , und betrachte AD und BD als Grundlinien der beyden Dreyecke ADE und DBE , so ist E ihre gemeinschaftliche Spitze, und sie haben gleiche Höhe. [§. 27. *Zus. II.*]

Daher $\triangle ADE : \triangle DBE = AD : DB$ [§. 68.] Eben so ist auch $\triangle ADE : \triangle DEC = AE : EC$ [§. 68.].

Mithin $AD : DB = AE : EC$, indem
 $\triangle DBE = \triangle DEC$ [§. 46. *Zus. II.*] ist.

ad 2. u. 3.) Aus 1. ergibt sich, daß

$AD + DB : AD$ [od. DB] $= AE + EC : AE$ [od. EC]

d. i. $AB : AD$ [od. DB] $= AC : AE$ [od. EC] *).

I. Zusatz. (Fig. 87.) Wenn in einem Dreyecke zu einer Seite mehrere Parallellinien gezogen sind, so stehen die abgeschnittenen Stücke der Seiten in Proportion. Denn, da $DE \parallel FG \parallel BC$ ist, so muß

$AF : AG = AD : AE = DF : EG$ [Lehrs. 2. u. 3.] seyn. Auch ist $AF : AG = FB : GC$ [Lehrs. 1.], mithin

$AD : AE = DF : EG = FB : GC$.

II. Zusatz. Wenn man zwey Seiten eines Dreyeckes in proportionelle Theile theilt, und die Theilungspuncte durch eine gerade Linie verbindet, so ist diese mit der

*) In jeder dieser Proportionen kann man die mittlern und äussern Glieder verwechseln, die Verhältnisse umkehren, und überhaupt alle Proportions-Gesetze der Arithmetik anwenden.

ungetheilten Seite des Dreyeckes parallel; (Fig. 88.) d. i. wenn $AD : AB = AE : AC$ ist, so muß $DE \parallel BC$ seyn. Denn, wäre DE nicht $\parallel BC$, so ziehe man durch D eine Parallellinie zu BC z. B. DF ; dann wäre

$AD : AB = AF : AC$ [Lehrs.]. Es ist aber $AD : AB = AE : AC$ [Dat.]; folglich müßte $AF = AE$ seyn, welches nicht möglich ist.

Es muß daher DF mit DE zusammen fallen, und $DE \parallel BC$ seyn.

III. Zusatz. Wenn man in einem Dreyecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so verhalten sich die Parallelen zueinander, wie die anliegenden Seiten der Dreyecke, wozu sie gehören; d. i. (Fig. 88.) wenn $DE \parallel BC$ ist, so ist $DE : BC = AD : AB$.

$= AE : AC$; denn, zieht man $DG \parallel AC$, so ist $GC = DE$ [§. 42.], und $GC : BC = AD : AB$ [Lehrs. 3.], oder $DE : BC = AD : AB = AE : AC$. [Lehrs. 2.]

§. 72.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke einen Winkel halbirt, und die Halbirungslinie bis an die gegenüberstehende Seite zieht, so stehen die Stücke dieser Seite mit den beyden andern in Proportion.

Beweis. (Fig. 89.) *Thes.* $AD : DC = AB : BC$.

Daten. $o = n$. Man verlängere AB so, daß $BE = BC$ wird, und ziehe CE , so ist:

$m = x$ [§. 18. Zus. IV.] und $o + n = m + x$ [§. 37.], oder $2n = 2m$ und $n = m$, folglich $DB \parallel CE$ [§. 35. I.]; mithin $AD : DC = AB : BE$ [§. 71. 1.] $= AB : BC$.

Zusatz. (Fig. 89.) Wenn man in einem Dreyecke eine Seite mit den zwey übrigen proportionirt theilt, so halbirt die gerade Linie, vom Theilungspuncte an die gegenüberstehende Spitze gezogen, den Winkel des Dreyeckes, d. i. wenn

$AD : DC = AB : BC$ ist, so muß
 $o = n$ seyn; denn, verlängert man
 AB , so, daß $BE = BC$ wird, und zieht man CE , so ist,
da $AD : DC = AB : BC$ ist, auch
 $AD : DC = AB : BE$, folglich
 $DB \parallel CE$ [§. 71. Zus. II.], also auch
 $n = m$ [§. 34. I.], und
 $2n = 2m$. Auch ist
 $o + n = m + x = 2m$, mithin

 $o + n = 2n = n + n$, und
 $o = n$.

§. 73.

Lehrsatz. Die gerade Linie, welche die nicht parallelen Seiten eines Trapezes halbirte, ist der halben Summe der parallelen Seiten desselben gleich.

Beweis. (Fig. 90.) *Thes.* $EF = \frac{1}{2} [AB + CD]$.

Daten. $AB \parallel CD$, $AE = EC$ und $BF = FD$.

Verlängert man CA und DB , bis sie sich in K schneiden, so ist auch $EF \parallel CD \parallel AB$ [§. 71. Zusatz II.]. Man ziehe BC , dann EG und $HF \parallel CB$, so ist nach §. 71:

$AE : EC = AG : GB$, da aber $AE = EC$ ist, so ist auch $AG = GB = \frac{1}{2} AB$.

Ebenso ist $FD : BF = HD : CH$, da aber $BF = FD$ ist, so ist auch $HD = CH = \frac{1}{2} CD$.

Es ist aber $EI = GB$. [§. 42.]

$= \frac{1}{2} AB$, und

$IF = CH$ [§. 42.]

$= \frac{1}{2} CD$.

Dah. $EF = EI + IF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD$
 $= \frac{1}{2} [AB + CD]$.

§. 74.

Aufgaben. 1) Eine gegebene gerade Linie AC [Fig. 87.] nach einem gegebenen Verhältnisse $a : b : c$ zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe AB beliebig, und mache $AD = a$, $DF = b$ und $FB = c$, ziehe von B nach C eine gerade Linie, dann FG und $DE \parallel BC$, so ist:

$$AE : EG : GC = AD : DF : FB \text{ [§. 71. Zus. I.]} \\ = a : b : c.$$

Zusatz. Werden auf AB lauter gleiche Theile aufgetragen, so werden auch die Theile der gegebenen Linie gleich groß.

2) Zu drey gegebenen geraden Linien a, b, c (Fig. 91.) die vierte geometrische Proportionallinie x zu finden.

Auflösung und Beweis. Man zeichne einen Winkel BAC und mache $AD = a$, $DF = b$, dann $AG = c$, ziehe DG und durch F die Linie $FH \parallel DG$; so ist:

$$AD : DF = AG : GH \text{ [§. 71. 1.]}, \text{ oder}$$

$a : b = c : x$. Es ist also GH die verlangte vierte Proportionale.

§. 75.

Erklärung. Aehnlichkeit der Figuren ist ihre Uebereinstimmung in Rücksicht der Form oder Qualität. Geradlinige Figuren sind *ähnlich*

a) wenn sie bey gleicher Seitenzahl die Winkel der Ordnung nach gleich haben, und

b) wenn ihre gleichliegenden Seiten in Proportion stehen.

Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\simeq$.

I. Zusatz. Reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, denn sie haben gleiche Winkel, und das Verhältniß der Seiten ist gleich.

II. Zusatz. Alle Kreise sind ähnlich [§. 66. Zus. I.].

§. 76.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn sie zwey Winkel gleich haben.

Beweis. (Fig. 92). *Thes.* $\triangle abc \simeq \triangle ABC$.

Daten. $A = a$, $B = b$. Es muß dann auch $C = c$ [§. 38. Zus. II.] seyn. Man lege das $\triangle abc$ auf das $\triangle ABC$, so, daß die Winkel a und A aufeinander zu liegen kommen, so wird $b'c' \parallel BC$ seyn, da $b = B$ ist. Daher

$$Ab' : AB = Ac' : AC = b'c' : BC \text{ [§. 71. Lehrs. und III. Zus.]}$$

oder $ab : AB = ac : AC = bc : BC$, also

$$\triangle abc \simeq \triangle ABC. \text{ [§. 75.]}$$

§. 77.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich haben, und wenn die ihn einschließenden Seiten in Proportion stehen.

Beweis. (Fig. 92.) *Thes.* $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Dat. $a = A$, und $ab : AB = ac : AC$.

Man lege beyde Dreyecke mit den gleichen Winkeln auf einander, so ist, da vermöge Daten

$Ab' : AB = Ac' : AC$ ist, auch

$b'c' \parallel BC$ [§. 71. Zus. II.]; folglich ist

$Ab'c' = B$ und $Ac'b' = C$ [§. 34. II.], oder

$b = B$ und $c = C$.

Mithin $\triangle abc \sim \triangle ABC$ [§. 76.].

§. 78.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn darin alle gleichliegenden Seiten in Proportion stehen.

Beweis. (Fig. 93.) *Thes.* $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Daten. $ab : AB = ac : AC = bc : BC$.

Man mache $AD = ab$, und ziehe $DE \parallel BC$, so ist: AD oder $ab : AB = AE : AC$ [§. 71.]. Es ist aber

$ab : AB = ac : AC$ [Dat.]

Mithin $AE = ac$. [Arithm.]

Auch ist: AD oder $ab : AB = DE : BC$ [§. 71.]. Es ist aber $ab : AB = bc : BC$ [Dat.].

also auch $DE = bc$. [Arithm.]

Es ist also $\triangle ADE \cong \triangle abc$ [§. 20.].

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ [§. 76.].

Mithin $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

§. 79.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn darin zwey Seiten in Proportion stehen, und die, den gröfsern dieser Seiten gegenüberstehenden, Winkel gleich sind.

Beweis. (Fig. 93.) *Thes.* $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Daten. $a = A$ und $ab : AB = bc : BC$, aber $bc > ab$ und $BC > AB$.

Man mache $AD = ab$, und ziehe $DE \parallel BC$, so ist:
 AD oder $ab : AB = DE : BC$. [§. 71. Zus. III.]

Es ist aber $ab : AB = bc : BC$. [Daten.]

Mithin $DE = bc$. [Arithm.]

Es ist also $\triangle ADE \cong \triangle abc$. [§. 30.] Auch ist

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ [§. 76.],

also auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Zusatz. Zwey rechtwinklige Dreyecke sind ähnlich, wenn eine Kathete und die Hypotenuse einander proportionirt sind.

§. 80.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreyecke von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte fällt, so sind

1) die zwey kleinern Dreyecke unter sich und dem ganzen ähnlich, und

2) die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypotenuse.

Beweis. (Fig. 94.)

Thes. 1) $\triangle ABD \sim \triangle ABC \sim \triangle ADC$.

2) $BD : AD : DC$.

Daten. $BAC = R = o = m$.

ad 1) $BAC = o$

$$x = x.$$

Mithin $\triangle ABC \sim \triangle ABD$. [§. 76.]

Eben so ist $BAC = m$

$$y = y.$$

Also auch $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ [§. 76.].

Daher $\triangle ABD \sim \triangle ABC \sim \triangle ADC$.

ad 2) Da $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ ist, so ist auch

$BD : AD = AD : DC$ [§. 75. b.], oder

$$BD : AD : DC.$$

I. Zusatz. Jede Kathete des grossen Dreyeckes ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Stücke; nemlich:

$BD : AB : BC$ [§. 75. b.], indem $\triangle ABD \sim \triangle ABC$,
und $DC : AC : BC$ [§. 75. b.], da $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ ist.

II. Zusatz. Eine Senkrechte, in irgend einem Punkte
auf dem Diameter eines Kreises errichtet, ist die mittlere
geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten des
Diameters, d. i. (Fig. 95.)

$$BD : AD : DC,$$

denn, zieht man AB und AC , so ist $BAC = R$ [§. 58.
Zus. III.], mithin $BD : AD : DC$ [Lehrs. 2.].

III. Zusatz. Aus den beyden Proportionen des ersten
Zusatzes dieses §. ist:

$$AB^2 = BD \cdot BC, \text{ und} \\ AC^2 = DC \cdot BC. \text{ Mithin}$$

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC = [BD + DC] \cdot BC. \\ = BC \cdot BC = BC^2.$$

d. h. wenn man die Seiten des rechtwinkligen Dreyeckes
durch einerley Maß mißt [§. 67.], mithin ihre Gröfse in
Zahlen ausdrückt, so ist die Quadrat-Zahl der Hypotenuse
der Summe der Quadrat-Zahlen der beyden Catheten gleich.
Man kann daher in jedem rechtwinkligen Dreyecke aus
2 Seiten die dritte durch obige Gleichung finden.

§. 81.

Aufgabe. (Fig. 95.) Zu 2 gegebenen geraden Linien,
 a und b , die mittlere geometrische Proportionale zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man mache $BD = a$ und $DC = b$, halbire BC und
beschreibe darüber einen Halbkreis, errichte in D auf
 BC die Senkrechte AD , so ist diese die verlangte Linie;
denn es ist

$$BD : AD : DC \text{ [§. 80. Zus. II.]}, \text{ oder } a : AD : b.$$

§. 82.

Lehrsatz. Wenn sich in einem Kreise 2 Sehnen schnei-
den, so bilden die Stücke der einen Sehne die äußeren,
und die der andern die inneren, Glieder einer geometri-
schen Proportion.

Beweis. (Fig. 96.) *Thes.* $AE : CE = ED : EB.$

Daten. Man ziehe AC und BD , so ist

$$o = n \text{ (§. 10. Zus.)}$$

$$x = y \text{ (§. 58. Zus. I.)}$$

Also $\triangle ACE \sim \triangle DEB$ [§. 76.], und daher
 $AE : CE = ED : EB$.

I. Zusatz. (Fig. 97.) Schneiden sich die Sehnen verlängert aufserhalb des Kreises, so verhalten sich ihre Stücke aufserhalb des Kreises umgekehrt wie die Secanten, d. i.

$AD : AE = AC : AB$; denn zieht man DE und BC , so ist

$$p + n = 2R = n + x \text{ (§. 58. Zus. IV.);}$$

also auch $p = x$. Es ist auch

$$A = A.$$

Mith. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, [§. 76.] und

$$AD : AE = AC : AB.$$

II. Zusatz. (Fig. 98.) Schneidet eine Sehne verlängert eine Tangente, so ist diese die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Secante und ihrem Stücke aufserhalb des Kreises, d. i.

$AD : AB = AC$; denn, zieht man CB und DB , so ist

$$A = A$$

$$o = C \text{ (§. 59.)}$$

Also $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ [§. 76.], und

$$AD : AB = AC.$$

§. 83.

Lehrsatz. In ähnlichen Dreyecken verhalten sich die Höhen wie die Grundlinien.

Beweis. (Fig. 99.) *Thes.* $ad : AD = bc : BC$.

Dat. $\triangle abc \sim \triangle ABC$;

folglich $b = B$ [§. 75.], und da auch

$adb = ADB = R$ ist, so ist

$\triangle abd \sim \triangle ABD$ [§. 76.] und

$ab : AB = ad : AD$. Auch ist

$ab : AB = bc : BC$.

Mithin auch $ad : AD = bc : BC$.

§. 84.

Lehrsatz. Aehnliche geradlinige Figuren werden durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche Dreyecke getheilt.

Beweis. (Fig. 100.)

Thes. 1) $\triangle abc \sim \triangle ABC$,

2) $\triangle ace \sim \triangle ACE$.

Dat. $abcde \sim ABCDE$, daher

$b = B$, und

$ab : bc = AB : BC$ [§. 75.]

Also $\triangle abc \sim \triangle ABC$ [§. 77.]

Es muß also auch $bac = BAC$, und

$ac : AC = ab : AB = ae : AE$ seyn, und da auch $bae = bac = BAE = BAC$, oder

$cae = CAE$ ist, so muß

auch $\triangle ace \sim \triangle ACE$ [§. 77.] seyn.

Dafs $\triangle ced \sim \triangle CED$ ist, folgt aus *Thes.* 1. Ueberhaupt gibt es hier nur zweyerley Arten von Dreyecken, die eine Art hat zwey Polygons-Seiten und eine Diagonale, und die zweyte zwey Diagonalen und eine Polygons-Seite. Daher die zwey Thesen.

Zusatz. Gleichliegende Diagonalen ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwey gleichliegende Polygons-Seiten.

§. 85.

Lehrsatz. Die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwey gleichliegende Polygons-Seiten oder Diagonalen.

Beweis. (Fig. 100.)

Thes. $perim : PERIM. = ab : AB = ac : AC$,

Dat. $abcde \sim ABCDE$, also:

$ab : AB = ab : AB.$

$bc : BC = ab : AB.$

$cd : CD = ab : AB.$

$de : DE = ab : AB.$

$ea : EA = ab : AB.$

Folglich

$ab + bc + cd + de + ea : AB + BC + CD + DE + EA = 5ab : 5AB,$

oder $perim. : PERIM. = ab : AB$

„ „ „ $= ac : AC$. [§. 84. Zus.]

I. Zusatz. (Fig. 101.) Die Seiten und Perimeter gleichnamiger regulärer Vielecke verhalten sich wie die Radien oder Diameter der darum beschriebenen Kreise, d. i. wenn $abcdef$ $\oslash$ $ABCDEF$ ist, so ist:

$$\text{perim.} : \text{PERIM.} = ab : AB = r : R = d : D.$$

Denn es ist

$$\text{perim.} : \text{PERIM.} = ab : AB \quad [\text{Lehrs.}].$$

$$ab : AB = ah : AH, \text{ weil } \triangle abh \oslash \triangle ABH.$$

$$\text{Mith. perim.} : \text{PERIM.} = ab : AB = ah : AH = r : R, \\ \text{oder} = 2ah : 2AH = d : D.$$

II. Zusatz. Die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder Durchmesser.

§. 86.

Aufgabe. (Fig. 102.) Aus der Seite eines regulären n Eckes $AB = a$ und aus dem Radius des darum beschriebenen Kreises $AC = r$ die Seite eines regulären $2n$ Eckes $AD = b$, in demselben Kreise, zu finden.

Auflösung und Beweis. Man ziehe AC , CB und CD .

Es ist $AE = EB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$. [§. 23. Zus. IV.]

$AEC = R = AED$ [§. 23. Zus. IV.], daher

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 = \frac{1}{4} a^2 + ED^2. \quad [\text{§. 80. Z. III.}]$$

$$ED = CD - CE = r - \sqrt{AC^2 - AE^2} = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2},$$

$$\text{und } ED^2 = r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} + r^2 - \frac{1}{4} a^2.$$

$$= 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} - \frac{1}{4} a^2$$

$$= 2r [r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}] - \frac{1}{4} a^2. \quad \text{Folglich}$$

$$AD^2 = \frac{1}{4} a^2 + 2r [r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}] - \frac{1}{4} a^2, \text{ und}$$

$$AD = \sqrt{2r [r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}]}.$$

I. Zusatz. Setzt man $r = a = 1$, d. i. nimmt man a als die Seite eines regulären Sechseckes an [§. 65.], so erhält man die Seite des regulären Zwölfeckes

$$b = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,51763809. \dots$$

II. Zusatz. Sucht man aus der Gleichung,

$$b = \sqrt{2r [r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}]}$$

den Werth von $a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2}$, so hat man die Formel für die Seite eines regulären n Eckes durch die des regulären $2n$ Eckes und den Radius des darum beschriebenen Kreises ausgedrückt.

§. 87.

Lehrsatz. Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie eines Kreises ist $= 1 : 3,1415\dots = 1 : \pi$.

Beweis. Man setze den Radius $= 1$, so ist der Perimeter eines im Kreise beschriebenen regulären Sechsecks $= 6$ [§. 65.]. Man suche die Seite des regulären Zwölfecks [§. 86. *Zus. I.*]; sie ist $= 0,517638\dots$; folglich der Perimeter des Zwölfecks $= 6,211656\dots$ Auf ähnliche Art erhält man mit Hülfe des §. 86. den Perimeter des regulären Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks, Sechsendneunzigecks etc. Setzt man dieses Verfahren fort, so ergibt sich der Perimeter eines 768 Ecks $= 6,283\dots$ Nun ist dieses Vieleck vom Kreise sehr wenig unterschieden [§. 66. *Zus. I.*]; mithin ist für den Kreis:

$$\begin{aligned} \text{Diam. : Periph.} &= 2 : 6,283\dots \text{ oder} \\ d : p &= 1 : 3,1415\dots = 1 : \pi \end{aligned}$$

Setzt man, wie oben, die Vervielfachung der Polygons-Seiten noch weiter fort, und rechnet man überhaupt mit mehr Decimalstellen, so ergibt sich dafs:

$$d : p = 1 : 3,14159265358979323846264338327950288\dots$$

welche letztere Zahl gewöhnlich durch π bezeichnet wird. Sie heifst von ihrem Finder die Ludolphische Zahl. Im Gebrauche bey Berechnungen nimmt man von dieser Zahl nach Erforderniß der gröfsen oder geringern Schärfe mehr oder weniger Decimalstellen. *)

*) Archimedes fand $d : p = 7 : 22$, und $d : p = 71 : 223$. Ersteres Verhältniß gibt die Peripherie zu groß, letzteres zu klein an. Des Adrian Metius Verhältniß, $113 : 355$, gibt die Peripherie bis auf die siebente Decimalstelle richtig, ist aber sehr unbequem.

VII. A b s c h n i t t.

A. Mefung der geraden und Kreis - Linien, so wie auch der Winkel.

§. 88.

Erklärung. a) Nach §. 67. heifst *Messen* nichts anders, als angeben, wie oft eine bestimmte Gröfse (*Mafs*) in einer andern gegebenen enthalten ist. Das Mafs ist die *Einheit*, womit man die zu mafsende Gröfse vergleicht, um ihr Verhältnifs zu dieser Einheit durch eine Zahl auszudrücken. Es mufs stets das zu Mafsende mit dem Mafse gleichartig seyn.

Das gewöhnlichste Mafs für Linien (*Längenmafs*) ist der *Fufs* oder *Schuh*, eine Länge die zwar in verschiedenen Gegenden verschieden, aber jedes Mahl als bekannt vorausgesetzt ist.

Die Eintheilung des Fusses ist zweyfach, entweder

1) *geometrisch*, oder *zehntheilig*, daher *Decimalmafs*. Nach dieser theilt man den Fufs in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien und die Linie in 10 Scrupel. Zehn Fufs geben eine *geometrische Ruthe*.

2) oder *zwölftheilig*, daher *Duodecimalmafs*. Hier theilt man den Fufs in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, und die Linie in 12 Scrupel. Zwölf Fufs geben eine *Duodecimalruthe*.

Man bezeichnet Ruthen mit $^{\circ}$, Fufs mit $'$, Zoll mit $''$, Linien mit $'''$, Scrupel mit $''''$, welche Zeichen man rechts über die Zahlen setzt. So heifst z. B. $3^{\circ} 2' 5'' 6''' 4''''$ drey Ruthen, 2 Schuh, 5 Zoll, 6 Linien und 4 Scrupel.

Folgende Tabellen geben einen allgemeinen Ueberblick über die

Eintheilung des Längenmafses.

a. Decimalmafs.

Fufs.	Zoll.	Linien.	Scrupel.
1 $'$.	10.	100.	1000.
	1 $''$.	10.	100.
		1 $'''$.	10.
			1 $''''$.

b. Duodecimalmafs.

Fufs.	Zoll.	Linien.	Scrupel.
1'.	12.	144.	1728.
	1''.	12.	144.
		1'''	12.
			1''''

Eine Linie messen heisst ihre Länge durch Ruthen, Fufs, Zoll etc. angeben. Bey geometrischen Berechnungen nimmt man gewöhnlich das Decimalmafs.

Ein Körper, worauf das Längenmafs mit seinen Unterabtheilungen gezeichnet ist, heisst ein *Mafsstab*.

Der alte Pariser - Fufs (pied du Roi) wird nach der Duodecimaleintheilung in 144 Pariser - Linien getheilt; von diesen nimmt man noch Zehntel, Hundertel, u. s. w. Das Verhältnifs des Bayerischen zu diesem Pariser - Fufs ist $\equiv 1000 : 1113$.

b) Das neue Französische Längenmafs ist der *Mètre* (mètre définitif), der zehnmillionste Theil des Quadranten des Erd - Meridians, und ist $\equiv 3' 11,296'''$ Pariser - Mafs. Die weitere Eintheilung des Mètre ist: Decimètre, Centimètre, Millimètre d. i. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{1000}$ des Mètre; ferner Decamètre, Hectomètre, Kilomètre, Myriamètre d. i. 10, 100, 1000, 10000 Mètre.

§. 89.

Aufgaben. 1) Was geben 15° Duodecimalmafs im Decimalmafs ausgedrückt?

1) *Auflösung.* Da $1^{\text{duod.}^\circ} = 12'$ und $1^{\text{dec.}^\circ} = 10'$ ist, so ist $15^{\text{dd.}^\circ} : x^{\text{d.}^\circ} = 10 : 12$, woraus $x = 18^\circ$ Decimalmafs ist.

2) *Auflösung.* Da $1^{\text{duod.}^\circ} = 12'$ u. $1^{\text{dec.}^\circ} = 10'$ ist, so mufs $1^{\text{dd.}^\circ} : 1^{\text{d.}^\circ} = 12 : 10$ und

$10^{\text{dd.}^\circ} = 12^{\text{d.}^\circ}$ seyn; folglich ist

$10^{\text{dd.}^\circ} : 12^{\text{d.}^\circ} = 15^{\text{dd.}^\circ} : x^{\text{d.}^\circ}$, oder

$10 : 12 = 15 : x$, und

$x = 18^\circ$ Decimalmafs.

2) Was geben $3'' 6'''$ Decimalmafs im Duodecimalmafs?

Auflösung. Es ist $3'' 6''' = 36'''$ Decimalmafs, und
 $36^{d'''} : x^{d'''} = 100 : 144$, woraus
 $x = 51, 84'''$ Duodecimalmafs, oder
 $= 4'' 3''' 10.{}''''$ „

3) Was geben $3^{\circ} 1' 6''$ Duodecimalmafs im Decimalmafs?

Auflösung. Es ist $3^{\circ} 1' 6'' = 450''$ Duodecimalmafs, und $450^{d''} : x^{d''} = 12 : 10$, woraus
 $x = 375''$ Decimalmafs, oder
 $= 3^{\circ} 7' 5''$ „ ist.

4) Was geben 423,2 Pariser - Fufs im Bayerischen Mafse?

Auflösung. Es ist $423,2^{p'} : x^{b'} = 1000 : 1113$ [§. 88.],
daher $x = 471,02$ Bayerische Fufs.

5) Was geben 5000 Mètre im Bayer. Mafse?

Auflösung.

Es ist : Paris. Fufs : Mètre $= 1 : 3,078444$, [§. 88. b.]
und Bayer. Fufs : Paris. Fufs $= 1000 : 1113$. [§. 88.]

Daher Bayer. Fufs : Mètre $= 1000 : 1113. 3,078444$
 $= 1 : 3,4263 \dots$;

folglich $5000^m : x^{b'} = 1 : 3,4263 \dots$

und $x = 17131,5$ Bayer. Fufs.

Aufgaben zur Uebung.

- 1) Was geben $6^{\circ} 2' 7'' 8''' 5''''$ Decimalmafs im Duodecimalmafs?
- 2) Was betragen 24° Decimalmafs im Duodecimalmafs?
- 3) Was geben $1^{\circ} 1' 2'' 8'''$ Duodecimalmafs im Decimalmafs?
- 4) Wieviel betragen 100 Bayerische Fufs nach dem Wiener - Fufsmafse, wenn ein Bayer. Fufs $= 129,38$ und ein Wiener - Fufs $= 140,13$ Pariser - Linien ist?
- 5) Was geben 400' Bayer. Mafs. im Pariser - Mafse?
- 6) Was geben $112^{\circ} 7' 8''$ Bayer. Duodecimalmafs im Pariser - Mafse?
- 7) Was geben 236 Bayer. Fufs in Mètre?
- 8) Was betragen 230,7 Mètre im Bayerischen und was im Pariser - Mafse?

§. 90.

Aufgabe. Einen Maßstab zu verfertigen.

Auflösung. (Fig. 103.) Man ziehe AB und trage darauf mehrere gleiche Theile AE , EB etc. auf. In A , E , B , etc. errichte man auf AB Senkrechte [§. 23. 1.], und gebe ihnen beliebige, aber unter sich gleiche, Längen $AC = EF = BD$ etc. Man theile AC , beym Decimalmaße in 10, und beym Duodecimalmaße in 12 gleiche Theile und ziehe durch alle Theilungspuncte Parallelen zu AB [§. 36.]; setze auch an AC oder EF die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. Eben so theile man AE und CF in 10 oder 12 gleiche Theile. Endlich setze man an den Punct E eine Nulle, an den ersten Theilungs - Punct von F gegen C die Zahl 10, an den zweyten unterhalb 20, an den dritten oben 30 etc. (wie Fig. 103.). Dann ziehe man gerade Linien von 0 bis 10, von a bis b , von 20 bis 30, von c bis d etc., so ist der Maßstab vollendet.

Beweis. Man nehme an $AE = 100'$, so ist

$$Ea = F 10 = \frac{1}{10} AE = 10'.$$

Eben so ist $E 20 = 2. Ea = \frac{2}{10} AE = 20'$ etc.

Nun ist $EF : E 1 = F 10 : 1 g$. [§. 71. Zus, III.]

Es ist aber $E 1 = \frac{1}{10} EF$ [Constr.]; folglich auch

$$1 g = \frac{1}{10} F 10 = 1'.$$

Eben so ist $EF : E 6 = F 10 : 6 h$, [§. 71. Zus. III.]

und da $E 6 = \frac{6}{10} EF$ [Constr.] ist, so muß auch

$$6 h = \frac{6}{10} F 10 = 6' \text{ seyn etc.}$$

Diesem zu Folge ist:

$1 k = kg + g 1 = Ea + g 1 = 10' + 1' = 11'$,
und $6 l = 36'$, dann $mh = 100' + 6' = 106'$ und
 $ml = 136'$ etc.

I. Zusatz. Beträgt die Länge des Maßstabes 10 AE , so heißt er ein *tausendtheiliger*.

II. Zusatz. In Bayern ist es gewöhnlich, dem tausendtheiligen Maßstabe die Länge eines ganzen oder halben Bayerischen Schuh, mithin jeder Abtheilung wie AE , EB etc. die Länge eines ganzen oder halben Bayerischen Decimalzoll's zu geben.

III. Zusatz. Will man die Länge einer geraden Linie auf dem Papiere messen, so fasse man sie mit dem

Zirkel, und untersuche ihr Mafs durch das gehörige Anlegen dieser Zirkelöffnung an den Mafsstab.

§. 91.

Aufgabe. Die Peripherie p eines Kreises aus dessen Radius r oder Diameter d zu berechnen.

Auflösung. Man messe den Diameter d oder Radius r und multiplicire den Diameter oder doppelten Radius durch die Ludolphische Zahl π .

Beweis. Es ist für alle Kreise:

$$d : p = 1 : \pi \quad [\S. 87.]; \text{ folglich}$$

$$p = d \pi \text{ oder } 2 r \pi$$

Beispiel. Ist $d = 7'$, so ist $p = d \pi$

$$= 7. 3,141.$$

$$= 21,987' = 2^\circ 1' 9'' 8''' 7'''' \quad [\S. 88.]$$

Zusatz. Aus $p = d \pi$ ergibt sich, dafs $d = \frac{p}{\pi}$ ist, d. h. man findet den Diameter eines Kreises, wenn man dessen Peripherie durch die Ludolphische Zahl dividirt.

Beispiele zur Uebung.

1) Wie grofs ist die Peripherie eines Kreises dessen Radius $= 6' 7''$ ist?

2) Die Peripherie eines Kreises ist $7^\circ 3' 8''$; wie grofs ist dessen Radius und Durchmesser?

3) Der grösste Umkreis der Erde ist 5400 Meilen, wie grofs der Diameter?

§. 92.

Erklärungen. a) Um Winkel zu messen bedarf man eines Winkels als Mafs. Dieses Mafs ist der rechte Winkel, denn alle rechten Winkel sind gleich [$\S. 9. \text{Zus. II.}$]. Der neunzigste Theil eines rechten Winkels heifst ein *Grad*, der sechzigste eines Grades eine *Minute*, und der sechzigste Theil einer Minute eine *Secunde*. Man nennt diese Eintheilung *Sexagesimaleintheilung*.

Grade, Minuten und Secunden werden dadurch bezeichnet, dafs man rechts über die Zahlen die Zeichen $^\circ$, $'$, $''$ setzt, so z. B. heifst $15^\circ 12' 36''$ — 15 Grade 12 Minuten und 36 Secunden.

I. Zusatz. Ein gerader Winkel hat 180° , und die Summe aller Winkel rings um einen Punct in einer Ebene beträgt 360° . [§. 9. Zus. III. u. VI.]

II. Zusatz. Betrachtet man den Winkel als Centralwinkel eines Kreises, so ergibt sich, daß durch die Theilung des rechten Winkels auch der Quadrant in 90 gleiche Theile getheilt wird, welche man ebenfalls Grade nennt. Dasselbe gilt von den Unterabtheilungen in Minuten, Secunden etc. Der Halbkreis hat demnach 180° und die ganze Peripherie 360° etc.

b) Auch das Französische Winkelmaß weicht von unserer Eintheilung des Quadranten in 90° (*Degrés*) ab. In Frankreich hat man für Winkel und Umkreis auch die Centesimaltheilung d. i. man theilt einen Quadranten in 100 Grade (*Grades*), einen Grad in 100 Minuten und eine Minute in 100 Secunden. Die ganze Peripherie des Kreises beträgt also 400° .

c) Das Messen eines Winkels auf dem Papiere geschieht durch das Auflegen des Transporteurs (eines auf einen flachen Körper gezeichneten und in ganze und halbe Grade etc. getheilten Halbkreises) und durch das Abzählen der, durch die Schenkel des Winkels abgeschnittenen, Grade etc. Diese Winkelmessung ist nur eine beyläufige Schätzung des Winkels. Von der genauen Winkelmessung handelt die Trigonometrie.

§. 93.

Aufgabe. Man soll die Französische oder Centesimaltheilung der Winkel auf unsere Sexagesimaltheilung reduciren.

Auflösung und Beweis. Es sind $100 \text{ Grades} = 90 \text{ Degrés}$, also $1 \text{ Grade} = \frac{9}{10} \text{ Degré}$, d. h. wenn man von der Zahl der *Grades* den zehnten Theil derselben subtrahirt, so erhält man die entsprechende Zahl der *Degrés*, d. i. ganze Grade mit einem Decimalbruche, der nun weiter in Minuten und Secunden, durch ein fortgesetztes Multipliciren mit 60, verwandelt wird. Z. B. Man soll $101^\circ 66' 95''$ Französisches Winkelmaß in unser Sexagesimalmaß nach Graden, Minuten etc. verwandeln.

Es ist $101^{\circ} 66' 95'' = 101,6695^{\circ}$, davon $\frac{1}{10}$
subtrahirt $10,16695$, gibt

$101^{\circ} 66' 95''$ Centes. Eintheil. $= 91,50255$ Grade, welche
im Sexagesimalmaße $91^{\circ} 30' 9,18''$ betragen.

Zusatz. Bey der umgekehrten Reduction der Sexage-
simal- auf die Centesimaleintheilung verwandle man die
Minuten und Secunden der ersteren in einen Decimalbruch,
und addire dem ganzen Ausdrucke sein Neuntel. Denn, da
 $1 \text{ Grade} = \frac{9}{10} \text{ Degré}$ ist, so muß $1 \text{ Degré} = \frac{10}{9} \text{ Grades}$
seyn. Z. B. Nach der Sexages. Einth. ist:

$$\begin{aligned} 38^{\circ} 42' &= 38,7^{\circ}, \text{ dazu} \\ \frac{38,7}{9} &= 4,3 \text{ addirt, gibt} \end{aligned}$$

$$38^{\circ} 42' \text{ Sexag. Einth.} = 43^{\circ} \text{ Centesim. Einth.}$$

§. 91.

Aufgabe. Aus dem Diameter d und der Anzahl der
Grade n eines Bogens die Länge desselben a zu finden.

Auflösung.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } n^{\circ} : 360^{\circ} &= a : p \\ &= a : d\pi \text{ [§. 91.];} \end{aligned}$$

$$\text{folglich } a = d\pi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}} = 2r\pi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}.$$

Beyspiel. Für $d = 6'$ und $n = 50^{\circ}$ ist:

$$a = 6 \cdot 3,141 \cdot \frac{50}{360} = 2,617 \dots = 2' 6'' 2'''$$

beynahe.

Hält der Bogen, n , Minuten und Secunden, oder
Grade, Minuten und Secunden, so muß man sowohl den
Zähler als den Nenner des Bruches $\frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}$ auf die kleinste
Benennung, Secunden, reduciren.

$$\text{Zusatz. Aus } a = d\pi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}} \text{ ist } n^{\circ} = \frac{360^{\circ} \cdot a}{d\pi}, \text{ woraus}$$

die Anzahl Grade, aus dem Diameter und aus der Länge
des Bogens berechnet wird.

B. Berechnung der ebenen Figuren.

§. 95.

Erklärung. Das Maß einer Fläche ist ebenfalls eine
Fläche. Das gewöhnlichste Maß zu geometrischen Mes-

sungen ist der *Quadrat-Fufs*, d.i. ein Quadrat, wovon die Seite einen Fufs misst. [§. 41. a.]. Man theilt ihn

1) nach der *Decimaleintheilung* in 100 kleinere Quadrate, *Quadrat-Zoll*, jeden Quadrat-Zoll in 100 kleinere Quadrate, *Quadrat-Linien*, und jede Quadrat-Linie wieder in 100 Quadrate, *Quadrat-Scrupel*. 100 Quadrat-Fufs bilden eine *Decimalquadrat-Ruthe*.

2) nach der *Duodecimaleintheilung* in 144 *Quadrat-Zoll*, jeden Quadrat-Zoll in 144 *Quadrat-Linien* und jede Quadrat-Linie in 144 *Quadrat-Scrupel*. 144 Quadrat-Fufs geben eine *Duodecimalquadrat-Ruthe*.

Man bezeichnet 6 Quadrat-Ruthen, 7 Quadrat-Fufs, 18 Quadrat-Zoll etc. durch $6\Box^{\circ} 7\Box' 18\Box''$.

Folgende Tabelle gewährt eine allgemeine Uebersicht über die

Eintheilung des Flächenmafses.

a. Decimalmafs.

$\Box$ Fufs.	$\Box$ Zoll.	$\Box$ Linien.	$\Box$ Scrupel.
1.	100.	10000.	1000000.
	1.	100.	10000.
		1.	100.

b. Duodecimalmafs.

$\Box$ Fufs.	$\Box$ Zoll.	$\Box$ Linien.	$\Box$ Scrupel.
1.	144.	20736.	2985984.
	1.	144.	20736.
		1.	144.

Eine Figur berechnen heisst angeben, wieviel Quadrat-Ruthen, Quadrat-Fufs, Quadrat-Zoll etc. in ihr enthalten sind.

Das Französische Flächenmafs ist das Quadrat des Decameters [§. 88. b.], *Are* genannt, (948,66 Pariser-Quadrat-Fufs). Ein *Are* enthält 10 *Déciare* oder 100 *Centiare*, so, dass ein *Centiare* ein *Quadrat-Metre* ist. 100 *Are* geben ein *Hectare* und 100 *Hectare* ein *Myriare*.

§. 96.

Aufgaben. 1) Was geben $5\Box^{\circ} 2\Box' 45\Box''$ Decimalmafs im Duodecimalmafs?

Auflösung. $5\Box^{\circ} 2\Box' 45\Box'' = 50245\Box''$ Dec. Mafs.

$$50245^{\Box''} : x^{\Box''} = 100 : 144, \text{ woraus}$$

$$x = 72352,8\Box'' = 3\Box^{\circ} 70\Box' 64\Box'' 115\Box''' 28,8\Box''''$$

Dd. Mafs.

2) Was geben $2\Box'' 5\Box'''$ Duodecimalmafs im Decimalmafs ausgedrückt?

Auflösung. Es ist $2\Box'' 5\Box''' = 41477\Box''''$ Duod. Mafs.

$$41477^{\Box''''} : x^{\Box''} = 2985984 : 1000000, \text{ woraus}$$

$$x = 13890,56\Box'''' = 1\Box'' 38\Box''' 90,6\Box'''' \text{ Decim.}$$

Mafs.

Zur Uebung.

- 1) Was geben $9\Box^{\circ}$ Duod. M. im Dec. M.?
- 2) Was geben $25\Box^{\circ}$ Dec. M. im Duod. M.?
- 3) Was geben $4\Box^{\circ} 7\Box'$ Dec. M. im Duod. M.?
- 4) Was geben $1\Box^{\circ} 36\Box' 95\Box'''$ Duod. M. im Dec. Mafse?

§. 97.

Aufgabe. (Fig. 104.) Ein Parallelogramm $AD = P$ zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Man messe dessen Grundlinie $CD = B$ und Höhe $AE = H$ durch einerley Mafs z. B. Fufs etc., und vergleiche das Parallelogramm mit dem Quadrat-Fufs ad , worin $ac = cd = 1$ ist; nämlich:

$$ad : P = ac : cd : AE : CD. \quad [\S. 70. \text{Zus.}]$$

$$= 1 : H : B$$

d. h. der Quadrat-Fufs, ad , ist im Parallelogramme P so oft enthalten, als 1 in dem Producte $H \cdot B$. Man findet also die Zahl der $\Box'$ etc., welche das Parallelogramm enthält, durch das Product aus der Grundlinie und Höhe.

I. Zusatz. Man berechnet ein Quadrat, wenn man das Mafs einer Seite quadriert. (Daher in der Arithmetik das Wort Quadrat für ein Product aus zwey gleichen Fac-

toren). Bey Berechnung des Rechteckes multiplicirt man zwey anstossende Seiten.

II. Zusatz. Man berechnet ein Dreyeck, wenn man dessen Grundlinie und Höhe multiplicirt, und das Product durch zwey dividirt. [§. 42. Zus. III.].

Beyspiele.

1) In Fig. 104. sey $CD = 8' 7''$, $AE = 6' 8'' 3'''$; wie viel beträgt der Inhalt des Parallelogramms?

Auflösung. Es ist $P = B \cdot H = 8,7' \times 6,83' = 8,7 \times 6,83 = 59,421 \square' = 59 \square' 42 \square'' 10 \square'''$

2) In einem Rechtecke misst eine Seite $39^\circ 3' 6''$, die daranstossende $54^\circ 7' 8''$; wie groß ist sein Inhalt M?

Auflösung. $M = B \cdot H = 39,36^\circ \times 54,78^\circ = 39,36 \cdot 54,78 = 2156,1408 \square^\circ = 2156 \square^\circ 14 \square' 8 \square''$ [I. Zus.].

3) In einem Dreyecke misst die Grundlinie $8' 6''$ die Höhe $5' 3'''$; was ist der Inhalt?

Auflösung. $M = \frac{1}{2} B \cdot H$ [II. Zus.] $= \frac{1}{2} \cdot 8,6' \cdot 5,03' = \frac{1}{2} \cdot 8,6 \cdot 5,03 = 21,629 \square' = 21 \square' 62 \square'' 90 \square'''$.

4) In einem Dreyecke misst die Grundlinie $12'$ die Höhe $3' 4'''$; wie groß ist seine Fläche?

Auflösung.

$M = \frac{1}{2} \cdot 12 \times 3,004 = 18,024 \square' = 18 \square' 2 \square'' 40 \square'''$.

Zur Uebung.

- 1) Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, dessen Seite $3^\circ 7''$ misst?
- 2) Welchen Inhalt hat ein Parallelogramm, dessen Grundlinie $3^\circ 6''$ und dessen Höhe $9' 3''$ lang ist?
- 3) Wie groß ist das Rechteck, dessen Länge $9^\circ 8''$ und dessen Breite $8' 9''$ ist?
- 4) Wie groß ist ein Dreyeck, dessen Grundlinie $9^\circ 6' 3''$ und dessen Höhe $1^\circ 9''$ beträgt?
- 5) In einem rechtwinkligen Dreyecke ist die eine Kathete $9' 8''$, die andere $1^\circ 1'$; wie groß ist sein Inhalt?
- 6) Wie groß ist die Höhe eines Parallelogramms, dessen Inhalt $36 \square' 9 \square'$ und dessen Grundlinie $8^\circ 9'$ ist?

7) Die Fläche eines Quadrats hält $1824\text{ }^{\circ} 62\text{ }^{\circ}'$; wie groß ist eine Seite?

8) Wie groß ist die Grundlinie eines $80\text{ }^{\circ}'$ großen Dreyeckes, wenn die Höhe $7' 3''$ beträgt?

§. 98.

Aufgabe. (Fig. 50.) Ein Trapez zu berechnen.

Auflösung. Man messe die beyden Parallelen AB und CD , so wie ihren Abstand AE , durch einerley Maß, und nehme das halbe Product aus der Summe der Parallelen in die Höhe.

Beweis. Man ziehe AD , so ist:

$$\begin{aligned}\text{Trap.} &= \triangle ACD + \triangle ABD \\ &= \frac{1}{2} CD \cdot AE + \frac{1}{2} AB \cdot AE \\ &= \frac{1}{2} AE [CD + AB].\end{aligned}$$

Beyspiel. Gesetzt $AE = 6' 3''$, $AB = 12' 7''$, $CD = 18'$. Wie groß ist der Inhalt?

Zusatz. Jede geradlinige Figur wird berechnet, indem man sie durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in Dreyecke theilt, diese einzeln berechnet [§. 97. Zus. II.], und ihre Werthe summirt.

§. 99.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines regulären n Eckes aus einer Seite a , und dem Radius des, darum beschriebenen, Kreises r zu finden.

Auflösung und Beweis. (Fig. 80.)

$BG = r$, $BC = a$, $BL = \frac{1}{2} a$. Es ist

$$\begin{aligned}\text{Pol.} &= n \cdot \triangle BGC \text{ [§. 63. Zus. I.]} \\ &= n \cdot \frac{1}{2} a \cdot GL \text{ [§. 97. Zus. II.]} \\ &= \frac{1}{2} a n \sqrt{BG^2 - BL^2} \text{ [§. 80. Zus. III.]} \\ &= \frac{1}{2} a n \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} \\ &= \frac{1}{4} a n \sqrt{4r^2 - a^2} \\ &= \frac{1}{4} a n \sqrt{[2r + a][2r - a]}.\end{aligned}$$

I. Zusatz. Ist das reguläre Polygon ein Sechseck, oder $n = 6$ und $a = r$ [§. 65.], so ist:

$$\text{Pol.} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}.$$

Beyspiel. Die Seite eines regulären Sechseckes ist $3' 7''$, wie groß der Inhalt?

II. Zusatz. Aus obiger Formel,

$$P = \frac{1}{4} a n \sqrt{4r^2 - a^2}, \text{ ist:}$$

$$1) \quad r = \frac{\sqrt{[16 P^2 + a^4 n^2]}}{2 a n}$$

$$2) \quad a = \sqrt{\left[2 \left[r^2 \pm \frac{1}{n} \sqrt{[r^2 n + 2P][r^2 n - 2P]} \right] \right]}$$

$$3) \quad n = \frac{4 P}{a \sqrt{[4r^2 - a^2]}} = \frac{4 P \sqrt{[4r^2 - a^2]}}{a [4r^2 - a^2]} \\ = \frac{4 P \sqrt{[(2r + a)[2r - a]]}}{a [2r + a][2r - a]}$$

§. 100.

Aufgabe. Eine Kreisfläche zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Setzt man die Kreisfläche K und den Radius r , so ist:

$$K = \frac{1}{2} p \cdot r = \frac{1}{2} 2r \pi \cdot r = r^2 \pi. \quad [\S. 66. \text{ Zus. II,} \\ \S. 97. \text{ II. Zus. und } \S. 91.]$$

$$= \frac{1}{4} d^2 \pi, \text{ da } r^2 = \frac{1}{4} d^2 \text{ ist.}$$

Beispiel. Wie groß ist der Kreis, dessen Radius 8' 7'' groß ist?

I. Zusatz. Aus $K = r^2 \pi = \frac{1}{4} d^2 \pi$ ist:

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi}} \text{ und } d = 2 \sqrt{\frac{K}{\pi}}.$$

II. Zusatz. (Fig. 105.) Es ist der Kreisausschnitt oder

$$\text{Sect. } ABC = r^2 \pi \frac{n^\circ}{360^\circ}; \text{ denn}$$

$$\text{Sect. } ABC = \frac{1}{2} AB. \text{ Bog. } BC. \quad [\S. 66. \text{ Zus. III,}]$$

$$= \frac{1}{2} r \cdot 2r \pi \frac{n^\circ}{360^\circ} \quad [\S. 94.]$$

$$= r^2 \pi \frac{n^\circ}{360^\circ}.$$

III. Zusatz. Aus $S = r^2 \pi \frac{n^\circ}{360^\circ}$ ist $n^\circ = \frac{360 S}{r^2 \pi}$ und

$$r = \sqrt{\left[\frac{360^\circ S}{n^\circ \pi} \right]}.$$

IV. Zusatz. Segment. $BDC = \text{Sect.} - \triangle ABC. \quad [\S. 13. \text{ b.}]$

V. Zusatz. Der zwischen zwey concentrischen Kreisen liegende Ring (Fig. 18.), wenn R und r die Radien sind, ist

$$= R^2 \pi - r^2 \pi = \pi [R^2 - r^2] \\ = \pi [R + r][R - r].$$

Beyspiele.

- 1) Der Winkel des Kreisausschnitts ist $36^{\circ} 12'$, der Radius $3'$; wie groß ist die Fläche des Sectors?
- 2) Wie groß ist der Winkel des Ausschnitts, dessen Inhalt $1^{\circ} 24' 62'' 66'''$ ist, wenn der Radius $6' 3''$ misst?
- 3) Wie groß ist der Radius des Kreises, worin für einen Winkel von $43^{\circ} 4'$ der Sector $6' 16'' 13''' 72''''$ hält?
- 4) Wie groß ist das Segment, das durch die Seite eines regulären Sechsecks $= 4'$ im Kreise abgeschnitten wird? [§. 65.]
- 5) Wieviel beträgt die Fläche des Ringes, welchen zwey concentrische Kreise bilden, deren Radien $8'$ und $4' 3''$ sind?

VIII. A b s c h n i t t.

Von den Verhältnissen der Figuren.

§. 101.

Lehrsatz. Aehnliche Dreyecke verhalten sich, ihrem Flächeninhalte nach, wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten.

Beweis. (Fig. 99.)

Thes. $\triangle abc : \triangle ABC = bc^2 : BC^2$.

Daten. $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Man ziehe ihre Höhen, ad und AD , so ist:

$\triangle abc : \triangle ABC = ad \cdot bc : AD \cdot BC$ [§. 70.]

nun ist $ad : AD = bc : BC$ [§. 83.], folglich

$ad \cdot \triangle abc : AD \cdot \triangle ABC = ad \cdot bc^2 : AD \cdot BC^2$, oder

$\triangle abc : \triangle ABC = bc^2 : BC^2$.

§. 102.

Lehrsatz. Aehnliche geradlinige Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

Beweis. (Fig. 100.)

Thes. $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2 = ac^2 : AC^2$.

Daten. $abcde \propto ABCDE$.

Man theile beyde Figuren durch gleichliegende Diagonalen in Dreyecke. Diese sind ähnlich [§. 84.].

Daher

$$\triangle abc : \triangle ABC = ac^2 : AC^2 = ab^2 : AB^2 \quad [\S. 101.]$$

$$\triangle ace : \triangle ACE = ac^2 : AC^2 = ab^2 : AB^2 \quad [\S. 101. \text{ u. } \S. 84. \text{ Z.}]$$

$$\triangle ced : \triangle CED = ce^2 : CE^2 = ab^2 : AB^2 \quad [\S. 101. \text{ etc.}], \text{ folgl.}$$

$$\triangle abc + \triangle ace + \triangle ced : \triangle ABC + \triangle ACE + \triangle CED =$$

$$= 3 ab^2 : 3 AB^2, \text{ oder}$$

$$abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$$

$$= ac^2 : AC^2.$$

I. Zusatz. Reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl, verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Diameter der darum beschriebenen Kreise; denn in Fig. 101. ist:

$abcdef \propto ABCDEF$ [§. 75. Zus. I.]. Es ist also $abcdef : ABCDEF = ab^2 : AB^2$ [Lehrs.]. Auch ist

$$ab^2 : AB^2 = r^2 : R^2 = d^2 : D^2. \quad [\S. 85. \text{ Zus. I.}]$$

$$\text{Mithin } abcdef : ABCDEF = r^2 : R^2 = d^2 : D^2.$$

II. Zusatz. Alle Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien oder Diameter [Zus. I. u. §. 75. Zus. II.]. Diesem gemäß ergibt sich, daß man, so wie die Quadrate §. 51., auch die Kreise verwandeln könne, nur muß man statt der Quadratseiten die Radien oder Diameter der Kreise nehmen.

§. 103.

Aufgabe. (Fig. 106.) Ein Rechteck AB zu quadriren, d. h. in ein, ihm gleiches, Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere AC so, daß $CD = BC$ wird, beschreibe über AD einen Halbkreis und verlängere BC bis an die Peripherie; dann ist EC die Seite des verlangten Quadrates.

Beweis. *Thes.* $EC^2 = AC \cdot BC$. [§. 97. Zus. I.]

Dat. Es ist $AC : EC : CD$ [§. 80. Zus. II.]. Mithin $EC^2 = AC \cdot CD = AC \cdot BC$, weil $CD = BC$ ist.

I. Zusatz. Jede geradlinige Figur läßt sich quadriren; denn man kann sie, nach §. 49. II. Zus., in ein Dreyeck, und dieses, nach §. 49. I. Zus., in ein Rechteck

verwandeln, welches letztere nach obiger Aufgabe quadriert werden kann.

II. Zusatz. Der Kreis läßt sich nicht quadriren; denn, da man die Peripherie aus dem Diameter nur durch Annäherung findet, so läßt sich auch kein, dem Kreise nach aller mathematischen Schärfe gleiches, Dreyeck, mithin auch kein solches Quadrat construiren.

§. 104.

Aufgabe. (Fig. 107.) Ein Parallelogramm nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man theile eine Seite z. B. CD nach dem gegebenen Verhältnisse z. B. wie $1 : 2 : 3$ [§. 74. 1.], so, daß

$$Cm : mn : nD = 1 : 2 : 3 \text{ ist.}$$

Durch die Theilungspuncte m und n ziehe man zur anliegenden Seite AC die Parallelen km und ln , so ist:

$$Am : kn : lD = Cm : mn : nD \text{ [§. 68. Zus.]}$$

$$= 1 : 2 : 3.$$

Zusatz. Ist die zu theilende Figur ein Dreyeck, so theile man eine Seite desselben nach dem gegebenen Verhältnisse; und ziehe von den Theilungspuncten nach der gegenüberstehenden Spitze des Dreyeckes gerade Linien. [§. 68.]

§. 105.

Aufgabe. (Fig. 108.) Jede geradlinige Figur in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man berechne die ganze Figur [§. 98. Zusatz], dividire den Inhalt durch die gegebene Anzahl der Theile, so erhält man die Gröfse eines Theiles. Er sey M .

Nun suche man den Flächeninhalt des äußersten Dreyeckes DEC , dann ist entweder

- 1) $\triangle DEC = M$, oder 2) $\triangle DEC < M$, oder
3) $\triangle DEC > M$.

Bey Nro. 1. ist das Dreyeck DEC ein verlangter Theil der Figur.

Bey Nro. 2. subtrahire man den Inhalt des Dreyeckes von M , nehme diesen Unterschied für den Inhalt eines

Dreyeckes, dessen Grundlinie EC ist, und suche die entsprechende Höhe [§. 97. *Zusatz II.*]. Auf EC errichte man eine Senkrechte aE , gleich der gefundenen Höhe. Durch a ziehe man $ac \parallel EC$ und die Linien aC und cC . Es ist dann $\triangle aEC = \triangle EcC$ [§. 46. *Zus. II.*] und dem obigen Unterschiede gleich, mithin auch $\triangle DEC + \triangle EcC = M$.

Bey Nro. 3. subtrahire man M vom $\triangle DEC$ und bestimme, wie bey Nro. 2. die Dreyecke, nämlich $\triangle bEC = \triangle dEC$, dem gefundenen Unterschiede gleich; dann ist $\triangle DEC - \triangle dEC = \triangle DdC = M$.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die übrigen Theile finden.

Zusatz. Sollen die Theile der Figur in einem gegebenen Verhältnisse stehen, so berechne man aus dem ganzen Inhalte die treffenden Theile und construire sie so, wie in obiger Aufgabe gezeigt wurde.

IX. A b s c h n i t t.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen,
und der Ebenen unter sich.

§. 106.

Grundsätze.

1) Durch *drey Punkte*, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist die *Lage* einer Ebene bestimmt.

2) Eine gerade Linie, wovon *zwey Punkte* in einer Ebene liegen, liegt ganz in dieser.

3) Eine gerade Linie durchschneidet eine Ebene nur in *einem Punkte*, den man *Durchschnittspunct* nennt.

4) Durchschneiden sich zwey Ebenen, so haben sie eine Linie (*Durchschnittslinie*) gemein.

I. Zusatz. Durch einen geradlinigen Winkel, durch ein Dreyeck, oder durch zwey Parallelen ist die Lage einer Ebene bestimmt. [1.]

II. Zusatz. Die Durchschnittslinie zweyer Ebenen ist stets eine gerade; denn (Fig. 109.), man nehme zwey

Puncte a und b , die beyde Ebenen gemein haben, und ziehe die gerade Linie ab , so liegt diese sowohl in der Ebene MN , als auch in der Ebene OP [2.], und ist der Durchschnitt beyder Ebenen [4.].

P o s t u l a t.

Man kann durch jede drey Puncte eine Ebene legen, und sie beliebig erweitern.

§. 107.

Erklärung. Eine gerade Linie steht auf einer Ebene *senkrecht*, wenn sie mit allen geraden Linien, die in der Ebene, vom Durchschnittspuncte aus an sie, gezogen werden können, rechte Winkel bildet.

I. Zusatz. (Fig. 109.) Eine gerade Linie de kann nicht auf zwey, sich schneidenden, Ebenen MN und OP zugleich senkrecht stehen. Denn, gesetzt sie stehe auf MN senkrecht, so ziehe man in der Ebene OP von d nach einen beliebigen Punct c der Durchschnittslinie, die gerade Linie dc , und in MN die Linie ec , so ist $dec = R$. [verm. Voraussetz.], und folglich $edc < R$. [§. 26. Zus.]. Mithin kann ed nicht auf OP senkrecht stehen. [Erkl.]

II. Zusatz. Eine gerade Linie kann in einem Puncte nicht auf zwey Ebenen senkrecht stehen; denn, da dieser Punct zu beyden Ebenen gehört, so schneiden sich diese, und die gerade Linie kann nicht auf zwey solchen Ebenen senkrecht stehen. [I. Zus.]

§. 108.

Lehrsatz. (Fig. 110.) Wenn eine gerade Linie auf eine Ebene so zu stehen kömmt, dafs sie mit zwey, vom Durchschnittspuncte in der Ebene gezogenen, geraden Linien (die aber nicht in eine Verlängerung fallen) rechte Winkel bildet; so steht sie auf der Ebene senkrecht.

Beweis. Es ist zu zeigen, dafs die Linie ab , welche auf bc und bd senkrecht steht, auch auf jeder, beliebig in MN von b aus gezogenen, Linie z. B. auf be senkrecht steht. Daher

Thes. $abe = R$.

Daten. 1) $abc = R = abd$. Man verlängere bc und bd . so, dafs

$bg = bc$, und
 $bf = bd$ werde. Zieht man fg und cd , so ist
auch $fbg = cbd$ [§. 10. Zus.], mithin

$$\triangle fbg \cong \triangle bcd \text{ [§. 18.], und daher auch}$$

$$fg = dc \text{ [§. 18. Zus. II.]}$$

$$bgf = bcd \text{ „ „ „}$$

2) Zieht man bh , als Verlängerung von be , so ist

$$\text{auch } bc = bg$$

$$bce = bgh \text{ [Nro. 1.]}$$

$$cbe = gbh \text{ [§. 10. Zus.]}$$

$$\text{Daher } \triangle bce \cong \triangle bgh \text{ [§. 31.]; folglich auch}$$

$$be = bh, \text{ und}$$

$$ce = gh.$$

3) Man denke sich eine Ebene durch a , g und c gelegt, und ziehe darin ac und ag ; so ist:

$$ab = ab$$

$$bc = bg, \text{ und}$$

$$abc = abg = R \text{ [Dat. u. §. 9. Zus. IV.]}$$

$$\text{Daher } \triangle abc \cong \triangle abg \text{ [§. 18.]; folglich auch}$$

$$ac = ag.$$

4) Eben so lege man durch a , d und f eine Ebene, und ziehe darin ad und af ; so ist:

$$ab = ab$$

$$bd = bf, \text{ und}$$

$$abd = abf = R \text{ [Dat. u. §. 9. Zus. IV.]}$$

$$\text{also } \triangle abd \cong \triangle abf \text{ [§. 18.], und}$$

$$ad = af.$$

5) In den Ebenen adc und afg ist:

$$ac = ag \text{ [nro. 3.]}$$

$$ad = af \text{ [nro. 4.], und}$$

$$cd = fg \text{ [nro. 1.]}$$

$$\text{Mithin } \triangle acd \cong \triangle afg \text{ [§. 20.], und}$$

$$acd = agf.$$

6) In diesen Ebenen ziehe man ae und ah , so ist :

$$\begin{aligned} ce &= gh \quad [\text{nro. 2.}] \\ ac &= ag \quad [\text{nro. 3.}], \text{ und} \\ ace &= agh \quad [\text{nro. 5.}]; \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ace &\cong \triangle agh \quad [\S. 18.], \text{ und} \\ ae &= ah. \end{aligned}$$

7) Man lege endlich durch a , h und e eine Ebene, so ist darin:

$$\begin{aligned} ab &= ab \\ be &= bh \quad [\text{nro. 2.}], \text{ und} \\ ae &= ah \quad [\text{nro. 6.}]; \text{ mithin} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle abe &\cong \triangle abh \quad [\S. 20.], \text{ und} \\ abe &= abh = R. \quad [\S. 9. \text{ Zus. I.}] \end{aligned}$$

I. Zusatz. Wenn eine gerade Linie auf drey andern, die in einem Punkte der erstern zusammenlaufen, senkrecht steht, so liegen die letztern in einer Ebene; denn sonst gäbe es, gegen $\S. 107. \text{ Zus. II.}$, eine Senkrechte auf zwey oder mehreren Ebenen in einem Punkte.

II. Zusatz. Es gibt in einem Punkte auf einer Ebene nur eine Senkrechte; denn wäre, auſser ab , auch bk auf MN senkrecht, so müſte, wenn man durch a , b , k eine Ebene abl legt, $kbl = R = abl$ seyn, welches unmöglich ist.

§. 109.

Lehrsatz. (Fig. 111.) Wenn von zwey Parallelen ab und cd , eine, z. B. ab , auf einer Ebene MN senkrecht steht, so steht auch die andere darauf senkrecht.

Beweis. Man ziehe bd , errichte, in MN , $de = ab$ senkrecht auf bd , und ziehe be , dann in der Ebene abd die Linie ad , so ist:

$$\text{Thes. } edc = R = bdc.$$

$$\text{Daten. } 1) ab \parallel cd, abd = R = abe \quad [\S. 108.].$$

$$\text{Dann ist } bd = bd$$

$$ab = de$$

$$\text{und } abd = bde = R, \quad [\text{Constr.}]$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \triangle abd &\cong \triangle bde \quad [\S. 18.], \text{ und} \\ ad &= be. \end{aligned}$$

2) Man lege durch a, b, e und durch a, d, e Ebenen. Diese schneiden sich in ae , und es ist:

$$\begin{array}{l} ae = ae \\ ab = de \\ be = ad \end{array} \quad [\text{nro. 1.}] \quad \text{Daher}$$

$$\triangle abe \cong \triangle ade \quad [\S. 20.], \text{ und} \\ abe = ade = R \quad [\text{nro. 1.}]$$

3) Da nun $ade = R = bde$ [nro. 1. u. 2.] ist, so muß de auf der durch abd gelegten Ebene [§. 108.], mithin auch auf cd senkrecht stehen, und also $edc = R$ seyn.

4) Da $ab \nparallel cd$ ist,
so ist $abd \perp bdc = 2R$ [§. 34. III.].
Es ist aber $abd = R$ [Dat.];

$$\text{also } bdc = R.$$

Zusatz. Wenn zwey gerade Linien ab und cd auf einer Ebene MN senkrecht stehen, so sind sie parallel; denn sonst wäre, wenn man $df \nparallel ab$ zöge, df auf MN senkrecht [Lehrs.], welches nach §. 108. II. Zus. unmöglich ist, da cd auf MN senkrecht steht.

§. 110.

Aufgaben. (Fig. 112.) I) Aus einem Punkte a , ausser einer Ebene MN , auf diese eine Senkrechte zu fällen.

Auflösung. Man ziehe, in MN , bc beliebig, lege durch a, b und c eine Ebene, und fälle darin ad senkrecht auf bc . In MN , im Punkte d , errichte man de senkrecht auf bc , lege durch a, d, e eine Ebene, und fälle darin af senkrecht auf de ; dann ist af die verlangte Senkrechte.

Beweis. Man ziehe durch $f, gh \nparallel bc$, so ist:

Thes. $afg = R = afd$. [§. 108.]

Daten. 1) $gh \nparallel bc$, da $adb = R = fdb$ [Constr.] ist, so ist bd senkrecht auf der Ebene adf [§. 108.], und, weil $gf \nparallel bd$, auch gf darauf senkrecht [§. 109.], mithin $afg = R$.

2) Da af auf de senkrecht construirt wurde, so muß auch $afd = R$ seyn.

II) In einem Punkte i auf MN eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung und Beweis. Man wähle aufser MN einen beliebigen Punkt a , fälle davon af auf MN senkrecht (1. Aufg.), lege durch a , f und i eine Ebene, und ziehe darin $ki \nparallel af$; so ist ki die verlangte Senkrechte [§. 109.].

Zusatz. Von einem Punkte a , aufserhalb einer Ebene MN , gibt es auf diese nur *eine* Senkrechte af , und diese ist die kürzeste Linie von a nach der Ebene; denn zieht man al beliebig, so ist $alf < R$ [§. 26. Zus.], da $afl \Rightarrow R$. ist. Es steht also al nicht auf MN senkrecht. Auch ist jede Linie $al > af$ [§. 28. Zus. II.]. Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene bestimmt also dessen Abstand von dieser.

§. 111.

Lehrsatz. (Fig. 113.) Winkel, in verschiedenen Ebenen, sind gleich, wenn ihre Schenkel die, rücksichtlich der durch die Spitzen gezogenen geraden Linie, nach einer Seite zu liegen, parallel sind.

Beweis. Thes. $abc = ABC$.

Daten. $ab \nparallel AB$, $bc \nparallel BC$. Man mache auch $ab = AB$, $bc = BC$, und ziehe bB , aA , cC , ac und AC , so ist:

$aA \nparallel bB$, und $cC \nparallel bB$ [§. 43. Zus.]; mithin

$aA \nparallel cC$, also auch $ac = AC$ [§. 43. Zus.]. Da nun auch $ab = AB$, und

$bc = BC$ [Dat.] ist, so ist
auch $\triangle abc \cong \triangle ABC$ [§. 20.], und
 $abc = ABC$.

§. 112.

Erklärungen. 1) Gerade Linien, die in allen Punkten gleich weit von einer Ebene abstehen [§. 110. Zus. I.], heissen mit dieser *parallel*.

2) Wenn man von einem beliebigen Punkte a (Fig. 112.) der Linie ad auf MN eine Senkrechte af fällt, und die Durchschnittspunkte d und f durch eine gerade Linie verbindet, so heisst der Winkel adf der *Neigungswinkel der Linie ad gegen die Ebene MN* .

3) Will man den Neigungswinkel zweyer sich schneidenden Ebenen, so errichte man (Fig. 109.) in einem beliebigen Punkte c der Durchschnittslinie ab , sowohl in der Ebene MN als in der Ebene OP , eine Senkrechte auf ab ; dann ist dce der *Neigungswinkel beyder Ebenen*. Man nennt die Ebene, worin dce liegt, die *Ebene des Neigungswinkels*.

I. Zusatz. (Fig. 109.) Ist der Neigungswinkel zweyer Ebenen ein rechter, so stehen diese auf einander senkrecht. Denn, wenn $dce = R$ ist, so muß auch $dcf = R$ [§. 9. *Zus. IV.*] seyn, und es neigt sich die Ebene OP gegen MN auf keine Seite mehr, als auf die andere.

II. Zusatz. Wenn man durch eine Linie, die auf einer Ebene senkrecht steht, eine Ebene legt, so steht diese auf der ersteren Ebene senkrecht; denn ihr Neigungswinkel ist $= R$ [*Zus. I.*].

III. Zusatz. Die Durchschnittslinie zweyer Ebenen steht auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht. [§. 108.].

IV. Zusatz. Die Ebene des Neigungswinkels zweyer Ebenen steht auf diesen beyden senkrecht; denn sie liegt in den Perpendickeln, die man von einem beliebigen Punkte jedes Schenkels des Neigungswinkels auf die andere Ebene fallen kann [*Zus. II.*].

§. 113.

Erklärung. Zwey Ebenen, die in allen Punkten gleichweit von einander abstehen [§. 110. *Zus. I.*], heißen *parallel*.

I. Zusatz. Parallele Ebenen schneiden sich, wenn man sie wie immer erweitert, nie [*Erkl.*].

II. Zusatz. Wenn eine gerade Linie auf zwey Ebenen zugleich senkrecht steht, so sind die Ebenen parallel; denn sie können sich nicht schneiden, sonst könnte die gerade Linie auf beyden Ebenen zugleich nicht senkrecht stehen [107. *Zus. I.*].

III. Zusatz. (Fig. 114.) Wenn zwey parallele Ebenen, MN und OP , durch eine dritte QR geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien, ab und cd , parallel; denn diese liegen beyde in QR , und, da ab stets

in NM , und CD in OP , bleibt, so müssen sie überall gleich weit von einander abstehen, mithin parallel seyn [§. 32.]; denn es ist $MN \# OP$.

§. 114.

Aufgabe. (Fig. 113.) Durch einen Punkt b eine Parallelebene zu OP zu legen.

Auflösung. Man fälle, von b , bB senkrecht auf OP [§. 110. 1.]. Durch B ziehe man in OP zwey beliebige gerade Linien AB und BC , und durch b , in der Ebene bBA , zu BA die parallele ba , eben so, in der Ebene bBC , zu BC die parallele bc [§. 36.]. Die durch b , a und c gelegte Ebene MN ist dann parallel zu OP .

Beweis. Thes. $MN \# OP$.

Daten. Da $ab \# AB$ und $bBA \equiv R$ ist, so muß auch $Bba \equiv R$ [§. 34. III.] seyn. Eben so ist, da $bc \# BC$, und $bBC \equiv R$ ist, auch $Bbc \equiv R$ [§. 34. III.]. Es steht also bB auf MN senkrecht [§. 108.], und, da vermöge der Construction bB auch auf OP senkrecht steht, so muß $MN \# OP$ [§. 113. Zus. II.] seyn.

§. 115.

Lehrsatz. (Fig. 114.) Wenn zwey Parallelebenen durch eine Ebene geschnitten werden, so sind die Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Parallelebenen gleich.

Beweis. Es ist $MN \# OP$, folglich auch $ab \# cd$ [§. 113. Zus. III.]. Man fälle, in QR , fh senkrecht auf cd , so muß fh auch auf ab senkrecht stehen. Man verlängere fh über f , errichte kh in OP senkrecht auf cd , und lege durch f , k , h eine Ebene. Diese wird MN und OP in fi und kh schneiden.

Es ist aber $fi \# kh$ [§. 113. Zus. III.],

mithin $gfi = fhk$ [§. 34. II.], welche Winkel die, im Lehrsatz genannten, Neigungswinkel sind [§. 112. 3.].

§. 116.

Lehrsatz. (Fig. 114.) Wenn zwey Ebenen durch eine dritte in parallelen Durchschnittslinien geschnitten werden, und mit ihr, nach einer Seite zu, gleiche Neigungswinkel machen, so sind sie parallel.

Beweis. 1) Man fälle in QR von f auf cd die Senk-

rechte fh , und verlängere hf , so ist, da $ab \nparallel cd$, der Winkel $bfg = R$ [§. 34. II.].

2) Man errichte, in MN , fi senkrecht auf ab , dann ist gfi der Ebene QR Neigungswinkel gegen MN [§. 112. 3.], und dann bf auf der Ebene gfi senkrecht [§. 112. Zusatz III.].

3) Die Ebene gfi schneidet, erweitert, OP in kh . Da auch hd , als parallel zu bf , auf der Ebene gfi senkrecht steht [§. 109.], so ist $dhk = R$, und fkh der Ebene QR Neigungswinkel gegen OP [§. 112. 3.].

4) Nach der Voraussetzung des Lehrsatzes ist $gfi = fkh$, mithin $fi \nparallel hk$ [§. 35. II.], denn sie liegen beyde in der Ebene des Neigungswinkels.

5) Nun fälle man ik senkrecht auf kh , so ist ik auch auf fi senkrecht [§. 33.], oder $fik = R$.

6) Zieht man $il \nparallel fb$, und $km \nparallel hd$, so muß, da bf auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht steht [2.], auch il und km darauf senkrecht stehen [§. 109.] und $lik = R = ikm$ seyn.

7) ik steht also senkrecht auf MN , da $fik = R = lik$ [5. 6.], und auch auf OP , indem $ikm = R = ikh$ [5. 6. und §. 108.] ist. Es muß also $MN \nparallel OP$ [§. 113. Zus. II.] seyn.

II. T h e i l.

Von den geometrischen Körpern.

I. A b s c h n i t t.

Erklärung der geometrischen Körper.

§. 117.

Erklärung. Die Neigung wenigstens dreier Ebenen, welche einen Punct miteinander gemein haben, heisst ein *körperlicher Winkel* oder eine *körperliche Ecke*.

I. Zusatz. Die Summe aller ebenen Winkel der sich neigenden Ebenen muss bey jedem körperlichen Winkel kleiner als 360° seyn; denn hielten diese Winkel zusammen 360° , so lägen sie in einer Ebene [§. 92. *Zus. I.*]; da sie nun eine Ecke, d. i. eine Höhlung bilden sollen, so muss ihre Summe kleiner als 360° seyn.

II. Zusatz. Zwey körperliche Winkel sind congruent, wenn die einzelnen ebenen Winkel und die Neigungen jeder zwey Ebenen gegeneinander der Ordnung nach gleich sind; denn, da in diesem Falle die einzelnen ebenen Winkel sich der Ordnung nach decken, auch jede zwey Ebenen dieser Winkel der Ordnung nach zusammenfallen, so müssen beyde körperlichen Winkel vollkommen ineinanderpassen.

§. 118.

Erklärungen. 1) Ein *geometrischer Körper* ist ein von allen Seiten begrenzter Raum. (§. 1.) Die Wissenschaft, welche sich mit den Eigenschaften der geometrischen Körper beschäftigt, heisst *Stereometrie*.

2) Ein geometrischer Körper heisst *regulär*, wenn alle begrenzenden Flächen reguläre, congruente, ebene

Figuren, und alle körperlichen Winkel congruent sind. Es gibt deren fünf, nämlich :

- a) das *Tetraëdron* (Fig. 115.), durch vier,
- b) das *Octaëdron* (Fig. 116.), durch acht,
- c) das *Ikosaëdron* (Fig. 117.), durch zwanzig reguläre und gleiche Dreyecke,
- d) das *Hexaëdron* (*Cubus* oder *Würfel*) (Fig. 118.), durch sechs gleiche Quadrate,
- e) das *Dodekaëdron* (Fig. 119.), durch zwölf gleiche reguläre Fünfecke begrenzt.

I. Zusatz. Wenigstens vier Ebenen gehören dazu, um einen geometrischen Körper zu bilden.

II. Zusatz. Ein Winkel eines regulären Dreyeckes hält 60° [§. 38. *Zus. IV.*], mithin ist die Summe dreier solcher Winkel, welche eine Ecke des Tetraëdron bilden, 180° ; bey dem Octaëdron geben deren vier die körperliche Ecke, sie sind zusammen 240° ; fünf solche Winkel, durch welche die Ecke des Ikosaëdron gebildet wird, geben 300° : da nun sechs, oder noch mehrere solche Winkel, 360° und darüber ausmachen, so gibt es hier keine körperliche Ecke [§. 117. *Zus. I.*], mithin auch, aufser den drey angeführten, keinen andern regulären Körper, dessen Grenzen reguläre Dreyecke sind. — Sind die begrenzenden Seitenflächen Quadrate, so gibt es nur einen regulären Körper, das Hexaëdron; denn, da ein Winkel des Quadrats 90° hält, so sind alle drey, welche die Ecke dieses Körpers bilden, 270° . Vier solche Winkel gäben schon 360° , schliessen also keine körperliche Ecke ein. — Von gleichen regulären Fünfecken wird das einzige Dodekaëdron begrenzt; denn ein Winkel des regulären Fünfeckes hält 108° , also drey solche bey einer Ecke dieses Körpers 324° . Da nun vier solche Winkel, und bey allen übrigen Vielecken schon drey entweder 360° oder noch mehr Grade ausmachen, so schliessen sie keine körperliche Ecke ein. Es gibt demnach, aufser den angeführten, keinen regulären Körper.

§. 119.

Lehrsatz. Körper, welche der Ordnung nach congruente körperliche Winkel und gleichviele ähnliche Seitenflächen haben, sind *ähnlich*.

Beweis. Die Qualität eines Körpers ist durch die Anzahl, Beschaffenheit und Lage der begrenzenden Flächen bestimmt; ist dieses alles in beyden Körpern einerley, so haben sie einerley Qualität (Form), sind also ähnlich.

I. Zusatz. In ähnlichen Körpern sind ähnlichliegende Linien einander proportionirt, denn das Verhältniß solcher Linien gehört zur Qualität, die in ähnlichen Körpern einerley ist.

II. Zusatz. Körper von gleichviel congruenten Seitenflächen und Ecken passen ineinander, sind also *congruent*.

§. 120.

Erklärung. Die vorzüglichsten einfachen geometrischen Körper sind im Allgemeinen:

- I. das *Prisma*,
- II. die *Pyramide*, und
- III. die *Kugel*.

§. 121.

Erklärung. 1) *Prisma* (Fig. 120.) heist jener geometrische Körper, dessen zwey gegenüberstehende parallele Flächen (*Grundflächen*) congruente geradlinige Figuren, und dessen übrige Flächen (*Seitenflächen*) so viele Parallelogramme sind, als eine der Grundflächen Seiten hat. Man nennt die Prismen nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche, *dreyseitig*, *vierseitig* etc. Stehen die Seitenflächen eines Prisma auf der Grundfläche senkrecht, so heist es ein *senkrecht*es, übrigens *schief*. Die Senkrechte, von einem Punkte der einen Grundfläche auf die andere, heist die *Höhe*, und jede Durchschnittslinie zweyer Seitenflächen die *Kante* des Prisma.

2) Ist die Grundfläche des Prisma ein Kreis, so heist es *Cylinder* (Walze) (Fig. 121.). Die gerade Linie *AB*, welche die Mittelpunkte der beyden Kreise verbindet, heist *Achse* des Cylinders. Steht diese auf der Grundfläche senkrecht, so heist der Cylinder *senkrecht*, übrigens *schief*.

3) Jedes vierseitige Prisma, bey welchem die gegenüberstehenden Seitenflächen je zwey und zwey parallel laufen, heist ein *Parallelepipedon*. (Fig. 122.) Dieses

heißt *rechtwinklig*, wenn alle seine begrenzenden Flächen Rechtecke sind,

I. Zusatz. (Fig. 120.) Wenn man ein Prisma parallel zur Grundfläche durch eine Ebene schneidet, so ist die Durchschnichtsfigur stets mit der Grundfläche congruent, d. i. wenn $\triangle def \# \triangle DEF$ ist, so muß $\triangle def \cong \triangle DEF$ seyn. Denn, da $\triangle def \# \triangle DEF$ ist, so muß $df \# DF$, $fe \# FE$, und $de \# DE$ [§. 113. *Zus. III.*], mithin $dfe = DFE$, $fed = FED$, und $edf = EDF$ [§. 111.] seyn. Auch ist $df = DF$, $fe = FE$, und $ed = ED$ [§. 42.]. Mithin $\triangle def \cong \triangle DEF$. Auf dieselbe Art wird der Beweis für jedes mehrseitige Prisma geführt.

II. Zusatz. Die Durchschnichtsfigur eines, parallel zur Grundfläche geschnittenen, senkrechten Cylinders ist ein Kreis und mit der Grundfläche congruent [*Zus. I.*].

§. 122.

Erklärung. (Fig. 123. u. 125.) 1) *Pyramide* heißt jener geometrische Körper, dessen Grundfläche eine ebene geradlinige Figur, und dessen Seitenflächen so viele ebene geradlinige Dreyecke sind, als die Grundfläche Seiten hat, die aber alle in einem Punkte *A* (*Spitze*) zusammenstoßen. Die Pyramide heißt nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche *dreyseitig*, *vierseitig* etc., und der senkrechte Abstand *AE* der Spitze von der Grundfläche die *Höhe* derselben. Das Stück *bdcBDC* der Pyramide, welches übrig bleibt, wenn man durch eine Ebene, parallel zur Grundfläche, das obere Stück *Abdc* abschneidet, heißt eine *abgekürzte Pyramide* (*Pyramis decurtata*).

2) Ist die Grundfläche einer Pyramide ein Kreis, so heißt sie ein *Kegel* (*Conus*) (Fig. 124.). Die Linie *AD*, von der Spitze bis an den Mittelpunkt der Grundfläche, ist seine *Achse*. Steht diese auf der Grundfläche senkrecht, so heißt auch der Kegel *senkrecht*, übrigens *schief*. Die gerade Linie *AB*, von der Spitze bis an einen Punkt der Peripherie der Grundfläche, heißt die *Seite* des Kegels. Das übrigbleibende Stück *bcBC* des Kegels, wenn man durch eine Ebene, parallel zur Grundfläche, das obere Stück abschneidet, ist ein *abgekürzter Kegel* (*Conus decurtatus*).

I. Zusatz. Wenn man eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so ist die Durchschnitsfigur jedes Mahl mit der Grundfläche *ähnlich*, d. i. wenn (Fig. 125.) $bd \parallel BD$ ist, so muß $bd \propto BD$ seyn; denn, da $bd \parallel BD$ ist, so muß $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, $de \parallel DE$, $eb \parallel EB$ [§. 113. *Zus. III.*], mithin $bcd = BCD$, $cde = CDE$, $deb = DEB$ und $ebc = EBC$ [§. 111.] seyn. Auch ist:

$$\left. \begin{array}{l} bc : BC = Ac : AC \\ cd : CD = Ac : AC \end{array} \right\} \text{ [§. 71.]}$$

folglich $bc : BC = cd : CD$.

Aus demselben Grunde ist auch:

$$cd : CD = de : DE = eb : EB.$$

Mithin $bd \propto BD$ [§. 75.].

II. Zusatz. Die zur Grundfläche parallele Durchschnitsfigur eines Kegels ist ein Kreis [*Zus. I.*].

§. 123.

Erklärung. (Fig. 126.) Die *Kugel* (Sphaera, globus) ist jener geometrische Körper, dessen krumme Oberfläche so beschaffen ist, daß jeder Punct derselben von einem Puncte innerhalb (*Mittelpunct*) gleichweit absteht. Dieser, überall gleiche, Abstand AC , FC etc. der Kugeloberfläche vom Mittelpuncte C heist der *Radius* der Kugel. Eine gerade Linie zwischen zwey Puncten der Oberfläche heist eine *Sehne*, und wenn sie durch den Mittelpunct der Kugel geht, ein *Durchmesser* derselben.

I. Zusatz. Alle Radien und Durchmesser derselben Kugel sind gleich; und alle Kugeln mit gleichen Radien oder Durchmessern sind congruent.

II. Zusatz. Wenn eine Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnitsfigur jedes Mahl ein Kreis (*Kugelkreis* genannt); denn, man fälle vom Mittelpuncte der Kugel auf die Durchschnittsebene die Senkrechte CH , so steht diese auf jeder geraden Linie HG , HI etc., welche von H in jener Ebene gezogen wird, senkrecht [§. 107.]. In der äußern Begrenzung dieser Fläche nehme man beliebig zwey oder mehrere Puncte z. B. G und I an, und ziehe HG und HI , so wie auch

CG und CI , welche Radien der Kugel und $= r$ sind. Da $CHG = R = CHI$ ist, so ist nach §. 80. *Zus. III.*

$$HG = \sqrt{[CG^2 - HC^2]} = \sqrt{[r^2 - HC^2]}.$$

Ebenso $HI = \sqrt{[CI^2 - HC^2]} = \sqrt{[r^2 - HC^2]}.$

Mithin $HG = HI.$

Auf gleiche Art kann man zeigen, dass alle geraden Linien, aus H nach der Begrenzung der Durchschnittsebene FGI gezogen, einander gleich sind; folglich ist FGI ein Kreis, und H dessen Mittelpunkt.

Da r , als Radius der Kugel, eine beständige Grösse ist, so wird $\sqrt{[r^2 - HC^2]}$ um so grösser, je kleiner HC wird, und umgekehrt, um so kleiner, je grösser HC ist. Hieraus folgt, dass jede, durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte, und von der Oberfläche derselben begränzte, Ebene ein *grösster Kugelkreis* ist, die übrigen Durchschnitte aber um so kleiner sind, je entfernter H vom Mittelpunkte der Kugel ist; und dass ferner alle grössten Kreise, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist, und alle kleineren, von diesem Mittelpunkte gleichweit abstehenden, Kreise einander gleich sind.

§. 124.

Erklärungen. (Fig. 126.) 1) Zwey Punkte D und E , auf der Oberfläche der Kugel, deren jeder von allen Punkten der Peripherie eines Kugelkreises $FLGI$ gleichweit absteht, heissen die *Pole* dieses Kugelkreises, so wie die gerade Linie DE , zwischen den Polen, die *Achse* derselben.

2) Verschiedene Kugelkreise, deren Ebenen zueinander parallel sind, heissen *Parallelkreise*, z. B. $FLGI$ und $AMBK$.

3) Jedes Stück der Oberfläche der Kugel, welches zwischen zwey Parallelkreisen liegt, heisst eine *Zone*, z. B. $FLGIAMBK$.

4) Jede Kugelkreisfläche zerlegt die Kugel in zwey Stücke, welche *Kugelabschnitte* (*Segmente*) heissen, z. B. $DFLGI$ oder $EFLGI$.

5) Der Theil der Kugel, der zwischen den Ebenen der Parallelkreise liegt, heisst eine *körperliche Zone*. Z. B. $FLGIAMBK$.

6) *Kugelausschnitt* (*Sector*) ist jener kegelförmige Theil der Kugel, dessen Grundfläche die Oberfläche eines Kugelabschnitts, und dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, z. B. *DFLGIC*.

7) *Keilförmiger Kugelausschnitt* (Fig. 126. a.) heisst jener Theil der Kugel, der zwischen zwey grössten Halbkreisen, *ADB* und *AEB*, liegt.

§. 125.

Erklärungen. 1) Das *Prisma* entsteht durch die Spuren der Bewegung der Grundfläche nach der Höhe oder Tiefe, jedoch unter steter Beybehaltung der parallelen Richtung mit ihrer vorigen Lage [§. 2.]. Auf dieselbe Art entsteht durch die Bewegung einer Kreisfläche der *Cylinder*. Dieser wird auch durch die Umdrehung eines Rechteckes um eine seiner Seiten erzeugt.

2) Nimmt eine ebene Figur während der Bewegung nach der Höhe oder Tiefe, unter Beybehaltung der parallelen Richtung zur vorigen Lage, progressiv ab, bis sie $= 0$ wird, so bilden die Spuren der Bewegung eine *Pyramide* [§. 2.]. Ist die bewegte Fläche ein Kreis, so entsteht der *Kegel*. Dieser wird auch durch die Umdrehung eines rechtwinkligen Dreyeckes um eine Kathete erzeugt.

3) Bewegt man eine halbe Kreisfläche um den Diameter so lange, bis sie wieder in ihre vorige Lage zu stehen kömmt, so entsteht die *Kugel*.

II. A b s c h n i t t.

Berechnung der Oberflächen der vorzüglichsten geometrischen Körper.

§. 126.

Erklärung. Die in einer Ebene ausgebreitete Oberfläche eines Körpers heisst dessen *Netz*. So sind Fig. 127. 128. 129. 130. und 131. die Netze für das Tetraëdron, Octaëdron, Ikosaëdron, Hexaëdron und Dodekaëdron.

Zusatz. Man findet die Oberfläche eines jeden regulären Körpers, wenn man eine seiner begrenzenden Flächen

berechnet, und den gefundenen Werth durch die Zahl dieser Flächen multiplicirt.

§. 127.

Aufgabe. Die Oberfläche eines jeden Prisma zu finden.

Auflösung. Man berechne eine der Grundflächen, nehme den gefundenen Werth doppelt und addire dazu die Summe der Seitenflächen, die man beym senkrechten Prisma durch das Product aus dem Perimeter der Grundfläche in die Höhe des Prisma erhält. Durch die Anschauung des in Fig. 132. dargestellten Netzes eines vierseitigen Prisma wird obiges klar. Ist das Prisma schief, so muß man seine Seitenflächen (Parallelogramme) besonders berechnen.

Zusatz. (Fig. 133.) Da beym senkrechten Cylinder die Grundfläche ein Kreis, folglich $= r^2 \pi$, und die krumme Seitenfläche ein Rechteck aus der Peripherie der Grundfläche $2r\pi$ und der Höhe des Prisma h ist, so ist die Oberfläche des Cylinders oder

$$S = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi[r + h].$$

Für den Fall, daß $h = 2r$ ist, wird $S = 6r^2\pi$.

§. 128.

Aufgabe. Die Oberfläche einer jeden Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man berechne die Grundfläche und addire dazu die Summe aller Seitenflächen (Dreyecke). Ist die Pyramide gleichseitig, so findet man ihre ganze Seitenfläche, wenn man den halben Perimeter der Grundfläche mit der Höhe eines Seitendreyeckes multiplicirt [§. 46. Zus. III.]. Fig. 134. stellt das Netz einer solchen Pyramide dar. Ist die Pyramide schief, so muß man jede Seitenfläche als Dreyeck besonders berechnen.

Zusatz. Beym senkrechten Kegel [§. 122. 2.], dessen Netz Fig. 135. darstellt, ist die Grundfläche $r^2\pi$, dann die krumme Seitenfläche einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie der Umfang der Grundfläche $2r\pi$ und dessen Höhe die Seite des Kegels a ist [§. 46. Zus. III.]. Daher die ganze Oberfläche oder

$$S = r^2\pi + r\pi a = r\pi[r + a].$$

Ist bey einem solchen Kegel bloß der Radius der Grundfläche r und die Höhe h gegeben, so kann man daraus a finden, nämlich es ist (Fig. 124.):

$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$ [§. 80. Zus. III.],
 oder $a = \sqrt{h^2 + r^2}$. Mithin
 auch $S = r\pi [r + \sqrt{h^2 + r^2}]$.

Für den Fall, daß $h = 2r$ ist, wird

$$S = r^2 \pi [1 + \sqrt{5}].$$

§. 129.

Aufgabe. Die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide zu finden.

Auflösung. Man berechne die beyden parallelen ebenen Figuren, addire dazu die Summe der Seitenflächen (Trapeze), die man bey der gleichseitigen abgekürzten Pyramide erhält, indem man die halbe Summe der Perimeter der untern und obern Grundfläche mit der Höhe eines Trapezes multiplicirt. Denn mehrere Trapeze von gleichen Höhen sind zusammen einem Trapeze von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie der Summe der Grundlinien der einzelnen, und dessen obere Parallele der Summe der oberen Parallelen der einzelnen Trapeze gleich ist. Ist die abgekürzte Pyramide schief, so muß man die einzelnen Seitentrapeze besonders berechnen. Fig. 136. ist das Netz einer senkrechten abgekürzten Pyramide.

I. Zusatz. Sind R und r die Radien der beyden Kreise und $a = bB$ (Fig. 124.) die schiefe Seite eines senkrechten abgekürzten Kegels, so ist, obiger Auflösung gemäß, dessen krumme Seitenfläche

$$\begin{aligned} &= [2R\pi + 2r\pi] \frac{a}{2} \\ &= [R + r] a\pi \end{aligned}$$

Addirt man dazu die beyden Kreisflächen $R^2\pi$ und $r^2\pi$, so ist die ganze Oberfläche oder

$$\begin{aligned} S &= R^2\pi + r^2\pi + a\pi [R + r] \\ &= \pi [R^2 + r^2 + a[R + r]]. \end{aligned}$$

Fig. 137. ist ein Netz eines senkrechten abgekürzten Kegels.

II. Zusatz. (Fig. 124.) Bezeichnet $Dd = h$ die Höhe des abgekürzten Kegels, und fällt man, in der Ebene ABC , die Linie bE senkrecht auf BC ; so ist $bE = Dd = h$, und

$$bB^2 = bE^2 + BE^2 \text{ [§. 80. Zus. III.], oder}$$

$$a^2 = h^2 + [R - r]^2, \text{ und}$$

$$a = \sqrt{h^2 + [R - r]^2}.$$

Mithin ist die Oberfläche eines abgekürzten Kegels, durch R , r und h ausgedrückt, oder

$$S = \pi [R^2 + r^2 + [R + r] \sqrt{h^2 + [R - r]^2}]. \text{ [Zus. I.]}$$

III. Zusatz. (Fig. 124.) Halbirt man Bb in m , und zieht man $mn \parallel BC$, so ist $mn = R + r$ [§. 73.], und die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels

$$= [R + r] a \pi = mn. a. \pi \text{ [Zus. I.]}$$

$$\Rightarrow 2. mo. a. \pi, \text{ d. h.}$$

die krumme Seitenfläche des senkrechten abgekürzten Kegels ist der eines Cylinders von der Höhe a gleich, der aber zur Grundfläche einen Kreis hat, dessen Radius dem arithmetischen Mittel zwischen den beyden Radien der Grundflächen des Kegels gleicht [§. 127. Zus.].

§. 130.

Lehrsatz. Wenn eine Kugel einen abgekürzten Kegel von innen so berührt, daß die Ebene des Berührungskreises die Höhe des abgekürzten Kegels halbirt; so ist die krumme Seitenfläche dieses abgekürzten Kegels der eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis der Kugel, und dessen Höhe die Höhe des abgekürzten Kegels ist.

Beweis. (Fig. 138.) Es sey $OL = 2r$ die Achse der Kugel und der Kreis um M ein größter Kugelkreis. Man ziehe durch den Punct A dieses Kreises die Tangente BC , mache $AB = AC$, und fälle BH und CI senkrecht auf OL . Dreht man die Fläche $CBHI$, so wie auch die Kreisfläche um OL , so beschreibt jene einen abgekürzten senkrechten Kegel, dessen Höhe $HI = h$ ist, und diese eine Kugel, welche den abgekürzten Kegel von innen so berührt, daß die Ebene des Berührungskreises die Höhe des abgekürzten Kegels in k halbirt. Dem Lehrsatz gemäß soll die krumme Seitenfläche dieses abgekürzten Kegels der eines Cylinders gleich seyn, der dieselbe Höhe h , aber den größten Kugelkreis der Kugel zur Grundfläche hat. Nun ist die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels $= [BH + CI] CB \pi$ [§. 129. Zus. I.], und die des Cylinders $= 2r \pi h$ [§. 127. Zus.]. Daher

$$\text{Thes. } [BH + CI] CB \pi = 2r \pi h.$$

Daten. Es ist $AB = AC$, und $DE = EF$, folglich, wenn man AE zieht, $AE = \frac{1}{2} [BD + CF]$ (§. 73.)

$$= BH + CI.$$

Man fälle von B auf CF die Senkrechte $BN = HI = h$, ziehe dann den Diameter AG und die Linie EG ; so ist

$$BNC = AEG = R$$

$$m = o = n, [\S. 59.]$$

folgl. $\triangle BNC \cong \triangle AEG$. [$\S. 76.$]

Mithin $BC : BN = AG : AE$, oder

$$BC : h = 2r : [BH + CI], \text{ und}$$

daher $[BH + CI] BC = 2rh$, folglich auch

$$[BH + CI] BC \pi = 2r\pi h \text{ seyn.}$$

Zusatz. Jede Zone [$\S. 124. 3.$], deren Höhe unendlich klein ist, ist der krummen Seitenfläche eines Cylinders von derselben Höhe gleich, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis der Kugel ist. (Fig. 138.) Denn, je kleiner HI wird, desto näher rückt die Tangente BC dem Bogen PQ . Wird HI unendlich klein, so fällt die Tangente BC mit dem unendlich kleinen Bogen PQ zusammen, und es ist die krumme Fläche der, durch die Umdrehung des unendlich kleinen Bogens entstandenen, unendlich kleinen Zone gleich der krummen Seitenfläche des, durch die Umdrehung der unendlich kleinen Tangente beschriebenen, abgekürzten Kegels. Dieses gilt von jeder andern Zone, deren Höhe unendlich klein ist. Es gleicht also eine solche Zone auch der krummen Seitenfläche eines Cylinders, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis, und dessen Höhe ebenfalls unendlich klein ist [Lehrs.].

§. 131.

Aufgabe. Eine Zone, die krumme Oberfläche eines Kugelabschnitts, so wie die der ganzen Kugel zu berechnen.

Auflösung und Beweis. 1) Um eine Zone zu berechnen multiplicire man den Umfang des größten Kugelkreises der Kugel mit der Höhe der Zone, d. i. (Fig. 139.)

Zone $ABCD = 2r\pi h$, wenn r der Radius der Kugel und $h = FG$ die Höhe der Zone ist; denn, man denke sich die Zone durch unendlich nahe liegende Parallelkreise in unendlich viele kleinere Zonen, deren Höhen unendlich klein sind, getheilt. Jede davon gleicht der krummen Seitenfläche eines Cylinders von derselben Höhe, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis der Kugel ist [$\S. 130.$]

Zus.]. Es ist also, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. die Höhen dieser unendlich kleinen Zonen sind,

$$\text{die erste derselben} = 2r\pi\alpha$$

$$\text{die zweyte „} = 2r\pi\beta$$

$$\text{die dritte „} = 2r\pi\gamma \text{ etc.}$$

$$\text{Mithin die ganze Zone } ABCD = 2r\pi[\alpha + \beta + \gamma + \dots] \\ = 2r\pi h, \text{ weil}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = h \text{ ist.}$$

2) Geht GF in GE über, so wird aus der Zone die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts, daher auch diese $= 2r\pi h$, wenn r der Radius der Kugel und $h = EG$ die Höhe des Kugelabschnitts ist [1.].

3) Setzt man $h = r$, so entsteht für die Oberfläche der Halbkugel $2r^2\pi$ [2.], mithin ist die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4r^2\pi$, d. h. die Oberfläche einer jeden Kugel ist ihrer vierfachen größten Kugelkreisfläche gleich.

I. Zusatz. Die krummen Oberflächen verschiedener Zonen und Kugelabschnitte sind gleich, wenn sie gleiche Höhen haben; im Gegentheile verhalten sie sich zueinander, wie ihre Höhen [1. und 2.].

II. Zusatz. Die Oberflächen zweyer oder mehrerer Kugeln von verschiedenen Radien verhalten sich wie die Quadrate dieser Radien, nämlich wie

$$4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2.$$

III. Zusatz. (Fig. 140.) Die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des darumbeschriebenen Cylinders $ABCD$ (dessen Radius der Grundfläche $= r$ und dessen Höhe $= 2r$ ist), wie

$$4r^2\pi : 6r^2\pi = 4 : 6 = 2 : 3 \text{ [§. 127. Zus.].}$$

IV. Zusatz. (Fig. 126.) Da in der Ebene $FDGE$ des größten Kugelkreises

$$DG^2 = DE \cdot DH \text{ [§. 80. Zus. I.]}$$

$$= 2r \cdot h \text{ ist, so ist auch}$$

$$DG^2\pi = 2r\pi h, \text{ d. h.}$$

die Fläche des Kreises, dessen Radius die Sehne der Kugel, vom Pole des Abschnittes bis an einen Punct der Peripherie desselben, ist, gleicht der krummen Oberfläche dieses Kugelabschnitts.

V. Zusatz. (Fig. 126. a) Die krumme Oberfläche des

keilförmigen Kugelausschnittes $ADBE$ [§. 124. 7.] ist, wenn r der Radius der Kugel und α der Neigungswinkel der in der Achse der Kugel sich schneidenden Ebenen ist,

$4 r^2 \pi \frac{\alpha^0}{360^0}$; denn es ist, wenn S die krumme Oberfläche des Ausschnittes und M die der Kugel ausdrückt,

$$M : S = 360^0 : \alpha^0, \text{ daher } S = M \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} = 4 r^2 \pi \frac{\alpha^0}{360^0}.$$

VI. Zusatz. Aus dem Bisherigen in Vergleichung mit §. 102. ergibt sich, daß sich die Oberflächen ähnlicher Körper wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten oder Dimensionen verhalten [§. 119.].

§. 132.

Aufgabe. (Fig. 140.) Man soll das Verhältniß der Oberfläche der Kugel zur ganzen Oberfläche des in der Kugel und des um dieselbe beschriebenen gleichseitigen Kegels HIK und EFG finden.

Auflösung. 1) Ist HIK der, in der Kugel beschriebene gleichseitige Kegel, d. h. ist $HI = HK = IK = p$, und $IN = r$, so ist

$$IK = p = r\sqrt{3} \text{ [§. 86. Zus. II. u. §. 65.]}$$

Es ist also die ganze Oberfläche des Kegels HIK oder $k = \frac{1}{2} p \pi [\frac{1}{2} p + p]$ [§. 128. Zus.],

$= \frac{3}{4} p^2 \pi = \frac{3}{4} r^2 \pi$. Diese mit der Oberfläche der Kugel $4 r^2 \pi$ verglichen, gibt, wenn M die Oberfläche der Kugel ausdrückt,

$M : k = 4 r^2 \pi : \frac{3}{4} r^2 \pi = 16 : 9$, d. h. die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des, in ihr beschriebenen, gleichseitigen Kegels, wie 16 : 9.

2) Für den, um die Kugel construirten gleichseitigen Kegel EFG ist $EF = EG = FG = q$, und $IN = r$.

Da $IK \parallel FG$ und $NL = LM = \frac{1}{2} NM$ ist [§. 30. Z. III.], so ist $IK : FG = NL : NM$, oder

$$p : q = 1 : 2; \text{ also}$$

$$q = 2p = 2r\sqrt{3}. \text{ [Nro. I.]}$$

Es ist also die ganze Oberfläche des, um die Kugel beschriebenen gleichseitigen Kegels EFG oder

$$K = \frac{1}{2} q \pi [\frac{1}{2} q + q] = \frac{3}{4} q^2 \pi \text{ [§. 128. Zus.]}$$

$$= 9 r^2 \pi, \text{ indem } q = 2r\sqrt{3} \text{ ist.}$$

Diese Oberfläche mit der der Kugel M verglichen, gibt:

$$M : K = 4r^2\pi : 9r^2\pi = 4 : 9, \text{ d. h.}$$

die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des, darum beschriebenen, gleichseitigen Kegels, wie 4 : 9.

Zusatz. Da nun aus dem Bisherigen

$$M : k = 16 : 9 \text{ [1.]}$$

und $M : K = 4 : 9 \text{ [2.]}$ ist, so ist auch

$$k : K = 4 : 16 = 1 : 4, \text{ d. h.}$$

der um die Kugel construirte gleichseitige Kegel ist der Oberfläche nach vier Mahl so groß, als der in derselben beschriebene.

III. A b s c h n i t t.

Vergleichung der geometrischen Körper.

A. Vergleichung der Prismen unter sich.

§. 133.

Lehrsatz. Zwey Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind congruent, wenn ihre Seitenflächen der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen die Grundflächen haben.

Beweis. Man lege die congruenten Grundflächen so auf einander, daß sie sich decken, dann muß jedes Paar gleichnamiger Seitenflächen zusammenfallen, indem sie der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen ihre Grundfläche haben. Ueberdies fallen auch die Ebenen der entgegengesetzten Grundflächen zusammen, denn sie sind zu den auf einander gelegten parallel und gleichweit von ihnen entfernt; es müssen dann auch die Durchschnittslinien dieser letztern Ebenen und der Seitenflächen, mithin die entgegengesetzten Grundflächen selbst zusammen fallen. Es paßt also das eine Prisma genau in das andere, und beyde sind congruent.

I. Zusatz. Würfel sind congruent, wenn sie gleiche Seiten haben [Lehrs.], und gleich große Würfel haben gleiche Seiten.

II. Zusatz. Senkrechte Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundflächen gleiche Durchmesser haben, und ihre Achsen gleich sind [Lehrs.].

III. Zusatz. Wenn man eine Seite oder die Höhe eines Prisma in gleich groſſe Theile theilt, und durch die Theilungspuncte Ebenen parallel zur Grundfläche legt, so wird dadurch das ganze Prisma in so viele congruente kleinere Prismen getheilt, als Theile vorhanden sind [Lehrs.] Dasselbe gilt auch für den Cylinder.

§. 134.

Lehrsatz. Ein Parallelepipedon wird durch eine Ebene, die zwey gegenüberliegende Seitenflächen nach ihren Diagonalen schneidet, in zwey congruente dreyseitige Prismen getheilt.

Beweis. (Fig. 141.)

Thes. $ABCDEF \cong BCGFEH$.

Daten. Da CB und EF Diagonale von den congruenten Parallelogrammen AG und DH sind, so ist

$\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle CBG \cong \triangle EFH$, und, da $AD \parallel CE \parallel BF \parallel GH$ und auch $AG \parallel DH$ ist, so sind die beyden Theile $ABCDEF$ und $BCGFEH$ des Parallelepipedon dreyseitige Prismen [§. 121. 1.].

Man nehme beym einen dreyseitigen Prisma das $\triangle DEF$ und beym andern das $\triangle CBG$ als Grundflächen an. Diese sind nach Obigem congruent. Da $AG \parallel DH$ ist, so haben beyde dreyseitigen Prismen gleiche Höhen. Auch haben ihre Seitenflächen der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen ihre Grundflächen; denn, da $AG \parallel DH$ und $AE \parallel BH$ [§. 121. 3.] ist, so hat AE dieselbe Neigung gegen die Grundfläche DEF als BH gegen BCG . Dasselbe gilt von AF gegen die Grundfläche DEF und von CH gegen BCG , denn es ist $AF \parallel CH$. Da ferner die Parallelebenen AG und DH durch die Diagonalebene CF , welche beyden dreyseitigen Prismen zukömmt, geschnitten sind, so hat diese gegen die eine Grundfläche DEF dieselbe Neigung als gegen die andere BCG . Es muſs also nach §. 133.

$ABCDEF \cong BCGFEH$ seyn.

Zusatz. (Fig. 141.) Ein dreyseitiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedons, welches mit ihm dieselbe

Höhe, aber eine doppelt so groſſe Grundfläche hat; denn es ist

$$ABCDEF = BCGFEH = \frac{1}{2} DG. \text{ [Lehrs.]}$$

§. 135.

Lehrsatz. Parallelepipeden mit einerley Grundfläche und gleichen Höhen (d. i. wenn sie zwischen zwey Parallelebenen fallen) sind gleich groſſ.

Beweis. Hier ergeben sich zwey Hauptfälle:

I. entweder liegen die Parallelepipeden mit zwey Seitenflächen in einer Ebene (Fig. 142. 143. 144.),

II. oder nicht (Fig. 145.).

Jeder dieser Hauptfälle zerfällt in drey Nebenfälle und zwar:

a) es liegen die beyden, den gemeinschaftlichen Grundflächen gegenüberstehenden Grundflächen zum Theile in einander,

b) oder sie stoſſen aneinander, oder

c) sie fallen ganz auseinander. Daher:

Ad I. ad a. (Fig. 142.) *Thes.* $AH = GK$.

Daten. $CH = CH \parallel AM$.

Man betrachte die beyden dreyseitigen Prismen $AICELG$ und $BKDFMH$, dann ELG und FMH als ihre Grundflächen, so findet sich, weil auch $AG \parallel BH$ und $IG \parallel KH$ [§. 121. 3.] ist, daſs

$AICELG \cong BKDFMH$ ist [§. 133.].

Nun ist $IBCDLFGH = IBCDLFGH$, mithin

$$AICELG + IBCDLFGH = BKDFMH + IBCDLFGH.$$

oder $AH = GK$.

ad b. (Fig. 143.) *Thes.* $AH = GI$.

Daten. $CH = CH \parallel AK$.

Es ist $ABCEFG \cong BCDFGH$ } [§. 134.],
und $BCDFGH \cong BIDFKH$

$$\text{folgl. } ABCEFG + BCDFGH = BCDFGH + BIDFKH,$$

oder $AH = GI$.

ad c. [Fig. 144.] *Thes.* $AH = GM$.

Daten. $GD = GD \parallel AK$.

Man betrachte die beyden dreyseitigen Prismen $ACLEGI$ und $BDMFHK$, so wie EIG und FKH als ihre Grundflächen, so ist, da auch $AG \parallel BH$ und $LG \parallel MH$. [§. 121. 3.] ist,

$ACLEGI \equiv BDMFHK$ [§. 133.],
 nun ist $BLNFIO \equiv BLNFIO$
 und $NCD OGH \equiv NCD OGH$; folglich auch

$$\underline{ACLEGI - BLNFIO + NCD OGH = BDMFHK - BLNFIO + NCD OGH,}$$

oder $AH = GM.$

Ad II. Um den zweyten Hauptfall (Fig. 145.) zu beweisen, betrachte man AH mit GK . Es soll

Thes. $AH = GK$ seyn.

Dat. $EH = EH \nparallel XY.$

Man construire das Hilfs-Parallelepipedon GO , welches mit seinen verticalen Seitenflächen in die Ebenen der verticalen Seitenflächen des Parallelepipedon GK , und mit seinen horizontalen Seitenflächen in die Ebenen der horizontalen Seitenflächen des Parallelepipedon AH fällt. Es ist demnach:

$$\begin{aligned} AH &= GO \quad [\text{I. c.}] \\ GO &= GK \quad [\text{I. a.}], \end{aligned}$$

mithin $AH = GK.$

I. Zusatz. Parallelepipeden von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn, legt man sie mit ihren congruenten Grundflächen zusammen, so ergibt sich ihre Gleichheit aus dem Lehrsätze, indem dann ihre beyden andern Grundflächen in eine zur ersteren parallele Ebene fallen müssen.

II. Zusatz. Alle dreyseitigen Prismen mit einerley oder congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn sie sind, nach §. 134. *Zus.*, Hälften von Parallelepipeden mit derselben Höhe aber doppelter Grundfläche [*Lehrs. und Zus. I.*].

III. Zusatz. (Fig. 146.) Alle Prismen mit einerley oder congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn sie lassen sich durch gleichliegende Diagonalebene in dreyseitige zerlegen, welche einzeln der Ordnung nach gleich sind [*Zus. II.*], und wenn die Theile gleich sind, so sind es auch die Ganzen.

IV. Zusatz. Alle Cylinder mit einerley oder congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich groß [*Zus. III. und §. 121. 2.*].

V. Zusatz. (Fig. 147.) Jedes schiefwinklige Parallele-

pedon ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleich große Grundfläche und Höhe, dann eine Seitenkante der Grundfläche gemein hat; d. i. $AF = AK$, wenn das Rechteck $AL =$ dem Rhomboide AH und $PF \parallel AH$ ist. Denn, stellt man auf die Grundfläche AH des schiefwinkligen Parallelepipedon AF die Seitenflächen PD , CH , MH und PI senkrecht, und erweitert man die Ebene BF bis sie diese senkrechten Seitenflächen schneidet, so entsteht das Parallelepipedon AG , welches Rechtecke zu Seitenflächen und das Rhombus AH zur Grundfläche hat; und es ist $AG = AF$ [Lehrs. II.].

Betrachtet man nun PD als Grundfläche des Parallelepipedon AG , und stellt man auf diese die Ebenen CL und PO senkrecht, erweitert sodann die Ebenen MH , PG und AH , bis sie diese senkrechten Ebenen schneiden, so entsteht wieder ein Parallelepipedon AK , dessen Grund- und Seiten-Flächen Rechtecke sind, und es ist

$$AK = AG \text{ [Lehrs. I. a.]}$$

Nun ist schon $AG = AF$ [Lehrs. II.],

mithin $AK = AF$.

Man kann demnach jedes schiefwinklige Parallelepipedon in ein gleiches rechtwinkliges verwandeln.

§. 136.

Lehrsatz. Wenn man ein Parallelepipedon durch eine Ebene, parallel mit einer Seitenfläche, schneidet, so verhalten sich die abgeschnittenen Stücke zu einander wie ihre Grundflächen.

Beweis. (Fig. 148.)

$$\text{Thes. } AI : KF = AM : KH.$$

$$\text{Daten. } LM \parallel CG \parallel DH.$$

Man messe AK und KB durch einerley Mafs, so wird sich finden, dafs das gemeinschaftliche Mafs, z. B. AN auf AK , m , und auf KB , n Mahl aufgetragen werden kann, und es ist dann

$$AK : KB = m : n.$$

Durch das Auftragen von AN ist die Linie AK in m , und die Linie KB in n , unter sich gleiche, Theile getheilt. Legt man nun durch diese einzelnen Theilungspuncte, parallel zur Seitenfläche CG , Ebenen, so wird

dadurch das Parallelepipedon AI in m , und das Parallelepipedon KF in n kleinere, unter sich congruente, Parallelepipeden getheilt [§. 133. *Zus. III.*], und es ist

$$AI : KF = m : n. \text{ Es ist aber}$$

$$AK : KB = m : n, \text{ folglich}$$

$$\text{auch } AI : KF = AK : KB. \text{ Nun ist}$$

$$AK : KB = AM : KH \quad [\S. 68. \text{Zus.}],$$

$$\text{mithin } AI : KF = AM : KH.$$

Ist das Verhältniß $m : n$ nicht rational, so nehme man das Maß AN so klein an, als nöthig ist, um sich dem rationalen Verhältnisse so viel möglich zu nähern. [Arithm.]

Zusatz. Wenn man ein Parallelepipedon durch eine Ebene parallel mit einer Seitenfläche durchschneidet, so verhält sich jeder Theil desselben zum ganzen Parallelepipedon wie die Grundfläche des Theiles zu der des ganzen. Denn es ist aus obigem Lehrsatz

$$AI + KF : AI \text{ oder } KF = AM + KH : AM \text{ oder } KH, \\ \text{oder } AF : AI \text{ oder } KF = AH : AM \text{ oder } KH.$$

§. 137.

Lehrsatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich.

Beweis. (Fig. 149.) *Thes.* $AF = LP$.

Daten. 1) Beide rechtwinklige Parallelepipeden AF und LP haben gleiche Höhen DB und QN , und gleiche Grundflächen, nämlich $AH = LO$. — Man erweitere die Ebenen CF , AD , AH und EH des Parallelepipedon AF über DF , DB , BH und FH hinaus, mache die Durchschnittslinie $BU = NO$, und schneide die erweiterten Ebenen durch eine, durch U parallel zu BF gelegte, Ebene RT ; so ist BS ein Parallelepipedon [§. 121. 3.].

2) Betrachtet man die Rechtecke BR und NP , so findet sich, daß $BR = NP$ ist, indem $BU = NO$ (construct.) und $DB = QN$ [Daten 1.] ist.

3) Man erweitere nun die Ebenen DS , DH , BT und RT des Parallelepipedon BS über die Seiten DR , DB , BU und RU hinaus, mache die Durchschnittslinie BW

$\equiv NL$, und lege durch W , parallel mit BR , eine Ebene WY , welche die so eben erweiterten Ebenen schneidet; dann ist WR wieder ein Parallelepipedon [§. 121, 3.]. — Da nun $BR \underline{\parallel} NP$ [2.] und $BW \equiv NL$ [constr.] ist, so muß $WR \equiv LP$ [§. 135, Zus. I.] seyn.

4) Indem, in den beyden Rechtecken WU und LO , $BU \equiv NO$ und $BW \equiv LN$ ist,

so muß $WU \equiv LO$ seyn. Nun
ist auch $AH \equiv LO$ [Daten.], folglich

$$\underline{WU \equiv AH.}$$

5) Nach §. 136. ist:

$$AF : BS \equiv AH : BT$$

$$\text{und } WR : BS \equiv WU : BT.$$

$$\underline{\text{Daher } AF : WR \equiv AH : WU,}$$

Nun ist $AH \equiv WU$ [4.], mithin muß

auch $AF \equiv WR$ seyn. Es ist aber

auch $WR \equiv LP$ [3.], folglich

$$\underline{AF \equiv LP.}$$

I. Zusatz. Alle Parallelepipedon mit gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich. Denn, sind sie rechtwinklig, so sind sie, wie so eben gezeigt wurde, gleich. Ist eines davon schief, so verwandle man es [nach §. 135. Zus. V.] in ein rechtwinkliges; dieses ist dann dem schiefen [§. 135.], und dem andern senkrechten [Lehrs.], folglich auch dieses letzte dem schiefen Parallelepipedon gleich. Sind beyde Parallelepipedon schief, so verwandle man beyde [§. 135. Zus. V.] in rechtwinklige; alsdann sind beyde rechtwinklige Parallelepipedon gleich [Lehrs.], auch ist jedes rechtwinklige dem dazu gehörigen schiefen gleich [§. 135.]; also sind auch beyde schiefe Parallelepipedon gleich groß.

II. Zusatz. Alle dreyseitigen Prismen mit gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich [Zus. I. und §. 134. Zus.].

§. 138.

Lehrsatz. Zwey rechtwinklige Parallelepipedon mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Beweis. (Fig. 150.)

Thes. $GB : PK = GF : PO$.

Daten. 1) $CG = LP$. Man erweitere die Ebenen AD , AF , GF und CH des Parallelepipedon GB über BD , BF , FH und DH hinaus, mache das Rechteck HS (mit der Seite FH) so groß als PO [§. 49. 3.], und schneide die erweiterten Ebenen durch eine durch U , parallel zu BH gelegte, Ebene UR . Dann ist HR ein Parallelepipedon [§. 121. 3.] und gleich groß mit PK [§. 137.].

2) Nach §. 136. ist:

$GB : HR = GF : HS$; also auch

$GB : PK = GF : PO$; denn es ist

$HR = PK$ und $HS = PO$ [1.].

I. Zusatz. Alle Parallelepipedon mit gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen. Für den Fall, daß beyde zu vergleichenden Parallelepipedon rechtwinklig sind, bürgt der Lehrsatz. Ist aber eines von den Parallelepipedon, oder sind beyde schiefwinklig, so verwandle man das eine oder beyde zuerst in rechtwinklige [§. 135. Zus. V.], wo sich dann ihr Verhältniß aus dem Lehrsatze ergibt.

II. Zusatz. Alle dreyseitigen Prismen verhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen, wenn sie gleiche Höhen haben [Zus. I. u. §. 134. Zus.].

§. 139.

Lehrsatz. Jedes Prisma verhält sich zum dreyseitigen von gleicher Höhe wie die Grundfläche des ersteren zu der des zweyten.

Beweis. (Fig. 151.) Man bezeichne das mehrseitige Prisma $ADFI$ durch M und das dreyseitige LPQ durch N , so wie des ersteren Grundfläche durch P und die des zweyten durch Q , so soll

Thes. $M : N = P : Q$ seyn.

Daten. 1) Man zerlege das mehrseitige Prisma M durch die Diagonalebene BK , KC etc. in die dreyseitigen Prismen $ABEFGK$, $BECGHK$ und $CEDHKI$, welche wir der Ordnung nach mit A, B und C , und ihre treffenden Grundflächen mit a , b und c bezeichnen wollen.

2) Es ist, da M und N , folglich auch A , B , C und N , gleiche Höhen haben, nach §. 138. *Zus. II.*

$$A : N = a : Q$$

$$B : N = b : Q$$

$$C : N = c : Q \text{ etc., folglich}$$

$$A + B + C : 3N = a + b + c : 3Q \text{ und}$$

$$A + B + C : N = a + b + c : Q, \text{ oder}$$

$$M : N = P : Q, \text{ indem}$$

$$A + B + C = M \text{ und } a + b + c = P \text{ ist.}$$

I. Zusatz. Jedes vielseitige Prisma ist einem dreyseitigen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Denn, ist in obiger Proportion [Lehrs.] $P = Q$, d. h. ist die Grundfläche des mehrseitigen Prisma gleich der des dreyseitigen, so muß auch $M = N$ seyn.

II. Zusatz. Alle Prismen, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind gleich groß [Zus. I. und §. 137, Zusatz II.].

III. Zusatz. Jeder Cylinder ist einem Prisma gleich, das mit ihm gleich große Grundfläche und Höhe hat. [Zus. II. und §. 121. 2.]

IV. Zusatz. Jedes Prisma und jeder Cylinder ist einem Parallelepipedon mit gleich großer Grundfläche und Höhe gleich [Zus. II. und III.].

V. Zusatz. Alle Prismen und Cylinder mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen [Zus. IV. und §. 138. Zus. I.].

B. Vergleichung der Pyramiden unter sich und mit Prismen.

§. 140.

Lehrsatz. Wenn man eine Pyramide durch eine oder mehrere Ebenen parallel zur Grundfläche schneidet, so verhalten sich die Durchschnichtsfiguren wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Beweis. (Fig. 125.) Man fälle von der Spitze A die Senkrechte AF , so soll:

$$\text{Thes. } bd : BD = Af^2 : AF^2 \text{ seyn.}$$

Daten. 1) Es ist $bd \parallel BD$, folglich $bd \propto BD$ [§. 122. Zus. I.]. Dann ist auch

$$bd : BD = bc^2 : BC^2 \text{ [§. 102.].}$$

2) Legt man durch A , B und F eine Ebene, so ist $bf \# BF$ [§. 113. *Zus. III.*], folglich:

$$\begin{aligned} Af : AF &= Ab : AB \quad [\S. 71.], \text{ auch} \\ \text{ist } bc : BC &= Ab : AB \quad [\S. 71. \text{ *Zus. III.*}] \end{aligned}$$

Mithin $Af : AF = bc : BC$ und

$$\begin{aligned} Af^2 : AF^2 &= bc^2 : BC^2. \text{ Es ist aber} \\ bd : BD &= bc^2 : BC^2 \quad [1.]; \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$bd : BD = Af^2 : AF^2.$$

I. Zusatz. Wenn man einen Kegel parallel zur Grundfläche durch eine oder mehrere Ebenen schneidet, so verhalten sich die Durchschnittenfiguren wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. — Auch ist die oben abgeschnittene Pyramide der ganzen ähnlich [§. 119.]. Dasselbe gilt für den Kegel.

II. Zusatz. Eine abgekürzte Pyramide kömmt einem Prisma von derselben Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner ihre Höhe ist. Denn es ist [Fig. 125.] $bd : BD = Af^2 : AF^2$; je kleiner nun fF , die Höhe der abgekürzten Pyramide ist, desto näher kömmt Af dem AF , d. i. das Verhältniß $Af : AF$, mithin auch $Af^2 : AF^2$ oder $bd : BD$, nähert sich immer mehr dem Verhältnisse der Gleichheit 1:1, und beyde ähnlichen Grundflächen der abgekürzten Pyramide sind immer weniger an Gröfse unterschieden, die Seitentrapeze nähern sich immer mehr Parallelogrammen, mithin auch die abgekürzte Pyramide selbst einem Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe [§. 121. 1.].

III. Zusatz. Ein abgekürzter Kegel kömmt einem Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner seine Höhe ist [*Zus. II.*].

IV. Zusatz. Die abgekürzte Pyramide, deren Höhe unendlich klein ist, verwandelt sich in ein Prisma von derselben Grundfläche und Höhe. Denn die beyden Grundflächen sind congruent die Seitenflächen Parallelogramme [*Zusatz II.*], folglich der Körper ein Prisma [§. 121. 1.], Eben deswegen ist auch ein abgekürzter Kegel, dessen Höhe unendlich klein ist, einem Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe gleich.

V. Zusatz. (Fig. 152.) Haben zwey Pyramiden $ABCD$

und $MNOPQ$ gleich groſſe Grundflächen und Höhen, so sind auch jene zwey zu den Grundflächen parallele Durchschnitsfiguren gleich groſſ, welche von den Spitzen der Pyramiden gleichweit abſtehen, d. i. $\triangle bcd = np$, wenn $\triangle BCD = NP$, und $AE = MR$, $Ae = Mr$, dann $bcd \# BCD$ und $np \# NP$ ist. Denn es ist hier:

$$\begin{aligned} \triangle BCD : \triangle bcd &= AE^2 : Ae^2 \\ NP : np &= MR^2 : Mr^2. \end{aligned} \quad [\text{Lehrs.}]$$

Nun ist $AE = MR$, $Ae = Mr$ [Vorauss.], also auch $AE^2 = MR^2$ und $Ae^2 = Mr^2$, mithin

$$\begin{aligned} \triangle BCD : \triangle bcd &= NP : np, \text{ und, weil} \\ \triangle BCD &= NP \text{ [Vorauss.] ist, so muſs auch} \\ \triangle bcd &= np \text{ ſeyn.} \end{aligned}$$

§. 141.

Lehrsatz. (Fig. 152.) Alle Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

Beweis. *Thes.* $ABCD = MNP$.

Daten. $\triangle BCD = NP$ und $AE = MR$.

Man ſtelle ſich die beyden Höhen AE und MR in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspuncte zur Grundfläche parallele Ebenen vor; so beſtehen beyde Pyramiden aus unendlich vielen abgekürzten Pyramiden [§. 122. 1.], welche Prismen gleich ſind [§. 140. *Zus.* IV.]. Dieſe kleinen Prismen haben der Ordnung nach gleich groſſe Grundflächen [§. 140. *Zus.* V.] und gleiche Höhen, mithin iſt das erſte Prisma der einen Pyramide dem erſten der andern, das zweyte der einen dem zweyten der andern etc. gleich [§. 139. *Zus.* II.]. Nun beſtehen die beyden Pyramiden aus gleich vielen ſolchen der Ordnung nach gleichen Prismen; es muſs alſo die Summe aller Prismen der einen Pyramide der Summe aller Prismen der andern, folglich auch die eine Pyramide der andern gleich ſeyn, d. i. $ABCD = MNP$.

Zusatz. Jeder Kegel iſt einer Pyramide gleich, die mit ihm gleich groſſe Grundfläche und Höhe hat [Lehrs. und §. 122. 2.].

§. 142.

Lehrsatz. Mehrere Pyramiden $P, p, \pi \dots$ mit der gleichen Höhe H und mit den Grundflächen B, b, β ſind

zusammen einer Pyramide M gleich mit derselben Höhe H und der Grundfläche Q , welche der Summe jener Grundflächen $B, b, \beta \dots$ gleich ist.

Beweis. *Thes.* $M = P + p + \pi \dots$

Daten. $H = H$ und $Q = B + b + \beta + \dots$

Man zerlege die Grundfläche Q der Pyramide M in ihre Theile B, b, β , etc. . . [§. 105. und *Zus.*]. Durch die Spitze der Pyramide M und durch jede der Theilungslinien der Grundfläche lege man Ebenen, so wird dadurch diese Pyramide in eben so viele kleinere Pyramiden getheilt, als die Grundfläche Q Theile hat [§. 122. 1.]. Diese einzelnen Pyramiden haben eine gemeinschaftliche Spitze, folglich alle die Höhe H ; die erste davon hat mit der Pyramide P , die zweyte mit der Pyramide p , die dritte mit der Pyramide π etc. gleich groſse Grundfläche und Höhe, sie sind also je zwey und zwey einander gleich [§. 141.]: es müssen demnach auch die ersteren zusammen genommen der Summe der letzteren gleich seyn,

d. i. $M = P + p + \pi$.

Zusatz. Mehrere Kegel von gleichen Höhen sind zusammen einem Kegel oder einer Pyramide mit derselben Höhe gleich, wovon die Grundfläche der Summe der Grundflächen der einzelnen gleicht.

§. 143.

Lehrsatz. Die dreyseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreyseitigen Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. (Fig. 153.)

Thes. $\text{Pyr. } BDEF = \frac{1}{3} \text{ Prism. } AEF$.

Daten. 1) Man lege im Prisma AEF durch B, D und F , dann durch B, C und D Ebenen, so wird dadurch das Prisma in die drey Pyramiden $BDEF, ABCD$ und $BCDF$ zertheilt, von welchen die ersteren zwey mit dem Prisma dieselbe Grundfläche und Höhe haben, daher $BDEF = ABCD$ ist [§. 141.].

2) Nimmt man bey der Pyramide $ABCD$ das $\triangle ADC$ und bey der Pyramide $BCDF$ das $\triangle DCF$ als Grundflächen an, so ist B ihre gemeinschaftliche Spitze, sie ha-

ben also gleiche Höhen [§. 110. *Zus. I.*], und gleiche Grundflächen [§. 42. *Zus. II.*]; mithin ist auch

$$BCDF = ABCD \quad [\S. 141.].$$

Es ist aber $BDEF = ABCD$ [1]; folglich

$$BCDF = ABCD = BDEF, \text{ also auch}$$

$$Pyr. BDEF = \frac{1}{3} Prism. AEF.$$

I. Zusatz. Jede Pyramide p ist überhaupt der dritte Theil eines jeden Prisma P , welches mit ihr gleiche Höhe H und Grundfläche B hat, oder $p = \frac{1}{3} P$. Denn, wenn m eine dreyseitige Pyramide und M ein dreyseitiges Prisma von der Höhe H und der Grundfläche B bezeichnen; so ist $M = P$ [§. 139. *Zus. II.*], $m = p$ [§. 141.], $m = \frac{1}{3} M$ [Lehrs.], folglich $p = \frac{1}{3} M = \frac{1}{3} P$.

II. Zusatz. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat [*Zus. I.* und §. 122. 2.].

§. 144.

Lehrsatz. Prismen von gleich grossen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

Beweis. (Fig. 154.)

Thes. Prism. AEF : Prism. GN = H : h.

Dat. 1) $\triangle DEF = LN$, $AD = H$, $GL = h$.

Man messe die Höhen H und h durch einerley Mafs z. B. durch aD , so wird sich finden, dafs dieses Mafs auf H , m und auf h , n Mahl aufgetragen werden kann, und es mufs $H : h = m : n$ seyn.

2) Durch dieses Auftragen wird H in m und h in n gleiche Theile getheilt. Man lege durch diese Theilungspuncte, parallel zur Grundfläche, Ebenen, so wird dadurch das Prisma AEF in m und das Prisma GN in n kleinere Prismen getheilt, welche alle unter sich gleich sind [§. 139. *Zus. II.*], denn sie haben gleich grosse Grundflächen und Höhen [§. 121. *Zus. I.*]. Es mufs also auch $Prism. AEF : Prism. GN = m : n$, und da auch

$$H : h = m : n \text{ [1.] ist,}$$

so mufs $Prism. AEF : Prism. GN = H : h$ seyn.

Ist das Verhältnifs $m : n$ irrational, so nehme man das Mafs aD so klein an, als nöthig ist, um sich dem

rationalen Verhältnisse so viel, als nur möglich ist, zu nähern [Arithm.].

I. Zusatz. Alle Parallelepipeden und Cylinder von gleichen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen. [Lehrsatz u. §. 139. *Zus. II. u. III.*]

II. Zusatz. Alle Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen [Lehrs. und §. 143. *Zus. I. u. II.*].

III. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Längen und Breiten, verhalten sich zu einander wie ihre Höhen; denn rechtwinklige Parallelepipeden, deren Längen und Breiten gleich sind, haben eben deswegen gleiche Grundflächen. [Lehrs.]

IV. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Längen und Höhen verhalten sich zueinander wie ihre Breiten [*Zus. III.*]; denn man kann bey jedem rechtwinkligen Parallelepipeden die drey Dimensionen verwechseln, und, was im Parallelepipeden des vorigen Zusatzes Breite war, nun als Höhe, und was Höhe war, nun als Breite betrachten.

V. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Breiten und Höhen verhalten sich wie ihre Längen [*Zus. III.*]; denn man kann in den Parallelepipeden des III. Zusatzes die Länge mit der Höhe verwechseln.

§. 145.

Lehrsatz. Rechtwinklige Parallelepipeden verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihren Längen, Breiten und Höhen.

Beweis. Gesetzt A und B seyen die Parallelepipeden, L, B, H des ersteren und l, b, h des letzteren Länge, Breite und Höhe, so ist zu zeigen, daß

Thes. $A : B = L . B . H : l . b . h$ ist.

Daten. Man wähle ein Hilfsparallelepipedon C, welches l, B, H und noch ein zweytes D, welches l, b, H zur Länge, Breite und Höhe hat. Es ist:

$$A : C = L : l \quad [\S. 144. \text{Zus. V.}]$$

$$C : D = B : b \quad [\S. 144. \text{Zus. IV.}]$$

$$D : B = H : h \quad [\S. 144. \text{Zus. III.}]$$

Mithin $A.C.D : B.C.D = L.B.H : l . b . h$ und

$$A : B = L.B.H : l . b . h.$$

I. Zusatz. Alle rechtwinkligen Parallelepipeden verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen, d. i.

$$A : B \equiv Basis \times H : basis \times h.$$

Denn es gibt das Product aus der Länge und Breite, oder $L. B$, die Grundfläche [$Basis$] des einen, und $l. b$ die Grundfläche [$basis$] des anderen Parallelepipeden. Da nun $A : B \equiv L. B. H : l. b. h$ [*Lehrs.*] ist, so muß auch $A : B \equiv Basis \times H : basis \times h$ seyn.

II. Zusatz. Alle Parallelepipeden, Prismen und Cylinder verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen [*Zus. I. dann §. 135. Zus. V. und §. 139. Zus. IV.*].

III. Zusatz. Alle Pyramiden und Kegel verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen [*§. 143. Zus. I. u. II.*]. Sind letztere gleich, so verhalten sich die Pyramiden und Kegel wie ihre Grundflächen, und sind erstere d. i. die Grundflächen gleich wie ihre Höhen.

§. 146.

Lehrsatz. Jede Kugel ist dem körperlichen Inhalte nach einer Pyramide gleich, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche und den Radius derselben zur Höhe hat.

Beweis. Man denke sich die Oberfläche der Kugel in eine Menge unendlich kleiner Dreyecke getheilt, welche einzeln als ebene Figuren angesehen werden können, deren Entfernung vom Mittelpuncte der Kugel der Radius ist. Betrachtet man diese Dreyecke als die Grundflächen von Pyramiden, deren Spitzen in dem Mittelpuncte der Kugel sich befinden; so ergibt sich, daß die Kugel zusammengesetzt ist aus einer unendlich großen Anzahl von Pyramiden, deren Grundflächen unendlich kleine Theile der Oberfläche der Kugel und deren Höhe der Radius ist. Da alle diese Pyramiden gleiche Höhen haben, so gleichen sie zusammen einer Pyramide, deren Grundfläche die Summe der Grundflächen der einzelnen Pyramiden, d. i. die ganze Oberfläche der Kugel, und deren Höhe der Radius der Kugel ist [*§. 142.*]. Es muß also die Kugel selbst dieser Pyramide gleichen.

Zusatz. Ein Kugelausschnitt (Sector) ist seinem körperlichen Inhalte nach einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die krumme Oberfläche des Sector's und deren Höhe der Radius der Kugel ist [Lehrs. u. §. 142].

IV. A b s c h n i t t.

Aehnlichkeit der Körper.

§. 147.

Erklärung. Zwey ebene Körper (Polyëder) heißen überhaupt dann ähnlich, wenn sie der Ordnung nach gleich viele ähnliche Begrenzungsflächen und congruente körperliche Winkel haben, [§. 119.] und ihre gleichliegenden Kanten, so wie alle gleichliegenden Dimensionen in Proportion stehen. Durch homologe Diagonalebene kann man sich solche ähnliche Körper in ähnliche dreyseitige Pyramiden in gleicher Ordnung zerlegt denken.

I. Zusatz. Alle gleichnamigen regulären geometrischen Körper sind ähnlich [Erkl. u. §. 119.].

II. Zusatz. Alle Kugeln sind ähnlich, denn man kann sich selbe als ähnliche Polyëder von unendlich vielen ähnlichen Seitenflächen vorstellen.

III. Zusatz. Alle senkrechten Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Achsen sich verhalten wie die Radien oder Diameter ihrer Grundflächen. Bey derselben Bedingung heißen auch zwey Kegel ähnlich.

§. 148.

Lehrsatz. Zwey ähnliche Prismen verhalten sich am körperlichen Inhalte zu einander, wie die Cubiczahlen (Cubuse) zweyer gleichnamigen Seiten oder Dimensionen.

Beweis. Man setze die beyden ähnlichen Prismen seyen P und p , ihre Grundflächen B und b , ein Paar homologe Seiten oder Dimensionen derselben A und a , dann ihre Höhen H und h ; so ist

Thes. $P : p \equiv A^3 : a^3$; denn

Daten. 1) Es ist $P : p \equiv B.H : b.h$ [§. 145. Z. II.].

2) Auch ist $B : b = A^2 : a^2$ [§. 102.]
und $H : h = A : a$ [§. 119. Zus. I.],

folglich $BH : bh = A^3 : a^3$; da aber
 $P : p = BH : bh$ [1.] ist, so

mufs auch $P : p = A^3 : a^3$ seyn.

I. Zusatz. Aus der Proportion des Lehrsatzes,
 $P : p = A^3 : a^3$, ist auch

$\sqrt[3]{P} : \sqrt[3]{p} = A : a$, d. h. die homologen Seiten
oder Dimensionen zweyer ähnlichen Prismen verhalten sich
zu einander wie die Cubicwurzeln aus den Zahlen,
welche die körperlichen Räume der Prismen ausdrücken.
Wäre also z. B.

$P : p = 2 : 1$; so müfste auch

$A : a = \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{1}$, oder

$A : a = \sqrt[3]{2} : 1$, folglich

$A = a \sqrt[3]{2}$ seyn.

Gesetzt, a wäre die Seite eines Würfels $p = 1$ (als
Einheit betrachtet), so wäre die Seite eines Würfels
 $P = 2$, von doppeltem Inhalte, nämlich $A = a \sqrt[3]{2}$
eine irrationale Zahlengröfse, weil $\sqrt[3]{2}$ irrational ist.
Arithmetisch läfst sich also ein Würfel verdoppeln, d. h.
die Seite desselben $a \sqrt[3]{2}$ beliebig weit annähernd berech-
nen, aber geometrisch, genau durch eine Construction
der niedern Geometrie, kann man diese Seite $a \sqrt[3]{2}$ nicht
erhalten.

II. Zusatz. Aehnliche Cylinder verhalten sich zu-
einander wie die Cubiczahlen der Radien oder Diameter
ihrer Grundflächen [Lehrs.]; denn, wenn die Grundflächen
 $B = R^2 \pi$ und $b = r^2 \pi$ sind, so ist:

$$B : b = R^2 \pi : r^2 \pi$$

$$H : h = R : r \text{ [§. 119. Zus. I.]; mithin}$$

$$BH : bh = R^3 \pi : r^3 \pi, \text{ da}$$

$$\text{auch } BH : bh = Cyl : cyl. \text{ [§. 145. Zus. II.] ist,}$$

$$\text{so mufs } Cyl. : cyl = R^3 \pi : r^3 \pi \\ = R^3 : r^3 \text{ seyn.}$$

III. Zusatz. Aehnliche Pyramiden und Kegel verhalten sich zueinander, wie die Cubiczahlen homologer Seiten oder Dimensionen.

§. 149.

Lehrsatz. Allgemein verhalten sich zwey ähnliche Körper (*Polyëder*) am körperlichen Inhalte zueinander, wie die Cubiczahlen ihrer homologen Seiten, Kanten oder Dimensionen.

Beweis. Man kann sich zwey ähnliche Polyëder durch homologe Diagonalebene in gleichviele ähnliche dreyseitige Pyramiden zerlegt vorstellen. Nun verhalten sich je zwey dieser ähnlichen Pyramiden, gleichwie die Cubiczahlen von je zwey homologen oder ähnlich liegenden Seiten oder Dimensionen. Sind zwey solche ähnliche Pyramiden P und p , die zugehörigen homologen Dimensionen S und s , so ist

$$P : p = S^3 : s^3 \quad [\S. 148. \text{Zus. III.}].$$

Eben dieses Verhältniß gilt offenbar für je zwey andere ähnliche Pyramiden, als Theile der Polyëder, also auch für die Summen der ähnlichen Pyramiden, nämlich für die ähnlichen Polyëder selbst. Sind nun zwey ähnlich liegende oder homologe Seiten derselben S und s , so verhält sich das eine Polyëder zum zweyten ähnlichen, wie $S^3 : s^3$.

Zusatz. Alle Kugeln verhalten sich, ihrem körperlichen Inhalte nach, wie die Cubuse ihrer Radien oder Durchmesser.

V. A b s c h n i t t.

Berechnung des körperlichen (cubischen) Inhaltes der geometrischen Körper.

§. 150.

Erklärungen. 1) Das Mafs eines Körpers ist ebenfalls ein Körper, das gewöhnlichste der Cubic-Fufs, d. i. ein Cubus oder Würfel, wovon jede Seite einen Fufs misst [$\S. 118. d.$]. Man theilt den Cubic-Fufs

A) nach der *Decimaleintheilung* in 1000 Cubic-Zoll, jeden Cubic-Zoll in 1000 Cubic-Linien, und jede Cubic-Linie in 1000 Cubic-Scrupel. 1000 Cubic-Fufs geben eine *Decimalcubic-Ruthe*.

B) nach der *Duodecimaleintheilung* in 1728 Cubic-Zoll jeden solchen Cubic-Zoll in 1728 Cubic-Linien und jede solche Cubic-Linie in 1728 Cubic-Scrupel. 1728 Cubic-Fufs geben eine *Duodecimalcubic-Ruthe*.

Man bezeichnet Cubic-Ruthen durch c^o , Cubic-Schuh durch c' , Cubic-Zoll durch c'' , Cubic-Linien durch c''' , und Cubic-Scrupel durch c'''' , welche Zeichen man rechts über die Zahlen setzt. So heisst z. B. 20^{c^o} $236^{c'}$ $52^{c''}$ etc. 20 Cubic-Ruthen, 236 Cubic-Fufs, 52 Cubic-Zoll etc.

2) Folgende Tabellen gewähren eine

Allgemeine Uebersicht über das Körpermafs.

a. Decimalmafs.

Cub.-Fufs.	Cub.-Zoll.	Cub.-Linien.	Cub.-Scrup.
1.	1000.	1000000.	1000000000
	1.	1000.	1000000.
		1.	1000.

b. Duodecimalmafs.

Cub.-Fufs.	Cub.-Zoll.	Cub.-Linien.	Cub.-Scrupel.
1.	1728.	2985984.	5159780352.
	1.	1728.	2985984.
		1.	1728.

3) Einen Körper berechnen heisst, angeben, wie oft das Mafs in ihm enthalten ist, oder wie viel Cubic-Ruthen, Cubic-Fufs etc. derselbe enthält.

4) Bey dem neuen französischen Masse ist das Grundmafs für den cubischen Inhalt fester Körper der *Cubic-Mètre* (*mètre cube*), *Stère* genannt. Der *Cubic-Mètre* enthält 1000 *Cubic-Decimètres*, oder 1000000 *Cubic-Centimètres*, oder 1000000000 *Cubic-Millimètres*. — Für flüssige Körper ist das Grundmafs das *Litre*, gleich groß mit dem *Cubic-Decimètre*.

Hier herrscht folgende Eintheilung:

Ein Kilolitre	od. 1000 Litres	=	1 Cub. Mètre.
„ Hectolitre	„ 100	„	= 0,1 „ „
„ Décalitre	„ 10	„	= 0,01 „ „
„ Litre	„ 1	„	= 0,001 „ = 1 Cub. Decim.
„ Décilitre	„ 0,1	„	= 0,0001 „ = 0,1 „ „
„ Centilitre	„ 0,01	„	= 0,00001 „ = 0,01 „ „
„ Millilitre	„ 0,001	„	= 0,000001 „ = 0,001 „ = 1 Cub. Centim.

§. 151.

Aufgaben. 1) Man soll $40^c' 216^{c''}$ Duodecimalmafs in Decimalmafs verwandeln.

Auflösung. Da der Cubic-Fufs für das Decimalmafs derselbe ist, wie für das Duodecimalmafs, so braucht man blofs die $216^{c''}$ in Decimalmafs zu verwandeln. Es ist

$$1728 : 1000 = 216^{\text{Dd. c''}} : x^{\text{Dec. c''}} \quad [\S. 150.]$$

$$\text{Mithin } x = \frac{216000}{1728} = 125^{c''} \text{ Decimalm.}$$

Es geben also $40^c' 216^{c''}$ Duodecimalmafs im Decimalmafs $40^c' 125^{c''}$.

2) Was geben $2^{c^o} 8^{c'} 9^{c''}$ Decimalmafs im Duodecimalmafs?

Auflösung. Man verwandle zuerst $2^{c^o} 8^{c'}$ in Duodecimalmafs. Es ist nämlich das Decimalmafs $2^{c^o} 8^{c'} = 2008^{c'} = 1^{c^o} 280^{c'}$ Duodecimalmafs. Nun verwandle man die $9^{c''}$ in Duodecimalmafs. Nämlich:

$$1000 : 1728 = 9^{\text{D. c''}} : x^{\text{Dd. c''}} \quad [\S. 150.], \text{ woraus}$$

$$x = 15,552$$

$$= 15^{c''} 953^{c'''} 1479,2^{c''''} \text{ Duod. M.}$$

Es geben also $2^{c^o} 8^{c'} 9^{c''}$ Decimalmafs im Duodecimalmafs ausgedrückt $1^{c^o} 280^{c'} 15^{c''} 953^{c'''} 1479,2^{c''''}$.

3) Man soll $3^{c^o} 26^{c'} 42^{c''} 130^{c'''}$ Decimalmafs in Duodecimalmafs verwandeln.

Auflösung. Man verwandle wieder zuerst die Ruthen und Schuh in das Duodecimalmafs d. i.

das Decimalm. $3^{c^o} 26^{c'} = 3026^{c'} = 1^{c^o} 1298^{c'}$ Duodecimalmafs.

Nun verwandle man die gegebenen $42^{c''} 130^{c'''}$ in

Duodecimalmafs, nachdem man zuerst alles auf die kleinste Benennung gebracht hat. Es sind nämlich $42^c'' 130^{c'''} = 42130^{c''}$; ferner

$$1000000 : 2985984 \stackrel{\text{D. } c'''}{=} 42130 : x \stackrel{\text{Dd. } c'''}{=} [\S. 150.].$$

$$\text{Daher } x = 125799,50592^{c''} \text{ Dd. Mafs.}$$

$$= 72^c'' 1383,50592^{c'''} \quad "$$

$$= 72^c'' 1383^{c'''} 874,2^{c''''} \quad "$$

Es geben also $3^c^\circ 26^c' 42^c'' 130^{c'''} \text{ Decimalmafs im Duodecimalmafs}$ ausgedrückt $1^c^\circ 1298^c' 72^c'' 1383^{c'''} 874,2^{c''''}$.

4) Was geben $6^c^\circ 210^c' 236^c'' 700^{c'''} \text{ Duodecimalmafs}$ im Decimalmafs?

Auflösung. Es ist

das Duodecimalm. $6^c^\circ 210^c' = 10578^c' = 10^c^\circ 578^c' \text{ D. M.}$

Ferner sind $236^c'' 700^{c'''} = 408508^{c''}$ und

$$2985984 ; 1000000 \stackrel{\text{Dd. } c'''}{=} 408508 : x \stackrel{\text{D. } c'''}{=} [\S. 150.].$$

$$\text{Daher } x = \frac{408508000000}{2985984} = 136808,5026^{c''} \text{ Dec. M.}$$

$$= 136^c'' 808^{c'''} 502,6^{c''''}, \text{ oder}$$

$$= 136^c'' 808^{c'''} 503^{c''''} \text{ Dec. Mafs.}$$

Es geben demnach $6^c^\circ 210^c' 236^c'' 700^{c'''} \text{ Duodecimalmafs im Decimalmafs}$ $10^c^\circ 578^c' 136^c'' 808^{c'''} 503^{c''''}$.

5) Man soll $176^c^\circ \text{ Duodecimalmafs}$ in Decimalmafs verwandeln.

Auflösung. Es ist

$$1000 : 1728 \stackrel{\text{Dd. } c^\circ}{=} 176 : x \stackrel{\text{D. } c^\circ}{=} [\S. 150.]$$

$$\text{und } x = 304,128^c^\circ \text{ Dec. Mafs.}$$

$$= 304^c^\circ 128^c' \quad " \quad "$$

Aufgaben zur Uebung.

1) Was geben $108^c^\circ \text{ Duodecimalmafs}$ im Decimalmafs? Antw. $186^c^\circ 624^c'$.

2) Es sollen $14^c^\circ 3^c' 87^c'' 793^{c'''} \text{ Decimalmafs}$ in Duodecimalmafs verwandelt werden. — Sie geben im Duodecimalmafs $8^c^\circ 179^c' 151^c'' 1220^{c'''} 852,4^{c''''}$.

3) Man soll $3^c^\circ 80^c' 1340^c'' \text{ Duodecimalmafs}$ in Decimalmafs verwandeln. Man erhält $5^c^\circ 264^c' 775^c'' 462^{c'''} 963^{c''''}$.

§. 152.

Aufgabe. Ein rechtwinkliges Parallelepipedon zu berechnen.

Auflösung. Man messe die Länge, Breite und Höhe des zu berechnenden Parallelepipedon mit einerley Mafs z. B. Fufs etc., und multiplicire diese drey Zahlenwerthe; oder man multiplicire die Grundfläche des Parallelepipedon mit seiner Höhe.

Beweis. (Fig. 155.) 1) Gesetzt AG sey das zu berechnende rechtwinklige Parallelepipedon, L , B , und H seine Länge, Breite und Höhe. Man vergleiche es mit dem Cubic-Fufs ag , worin Länge, Breite und Höhe, $l = b = h = 1$ ist. Nach §. 145. ist:

$$ag : AG = l . b . h : L . B . H.$$

$$= 1 : L . B . H.$$

$$= 1 : Basis \times H, \text{ (denn es ist } L.B$$

$= Basis$); d. h. der Cubic-Fufs ag ist so oft im Parallelepipedon AG enthalten, als die Einheit im Producte aus der Grundfläche und Höhe. Man findet also den körperlichen Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedon, wenn man seine Länge, Breite und Höhe durch einerley Mafs misst, und diese drey Zahlenwerthe multiplicirt, oder wenn man das Mafs der Grundfläche mit dem Mafse der Höhe des Parallelepipedon multiplicirt.

I. Zusatz. Jedes Parallelepipedon wird berechnet, indem man seine Grundfläche und Höhe mit einander multiplicirt. Denn jedes schiefwinklige Parallelepipedon gleicht einem rechtwinkligen mit gleich grosser Grundfläche und Höhe [§. 135. Zus. V.]. Da man nun ein rechtwinkliges Parallelepipedon durch das Product aus Grundfläche und Höhe berechnet [Aufg.], so gilt dieses auch von allen übrigen Parallelepipedon, indem die Grösse der in Rechnung kommenden Factoren stets dieselbe bleibt.

II. Zusatz. Ein Cubus oder Würfel wird berechnet, indem man das Mafs einer Seite desselben zum Cubus erhebt [Aufg.].

§. 153.

Aufgabe. Jedes Prisma zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire die Grundfläche des Prisma mit seiner Höhe.

Beweis. Jedes Prisma gleicht einem Parallelepipedon mit gleich grosser Grundfläche und Höhe [§. 139. Zus. IV.].

Dieses wird berechnet, indem man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt [§. 152. *Zus. I.*]; folglich gilt dieses auch für alle Prismen.

Zusatz. Da der senkrechte Cylinder ein Prisma mit einem Kreise zur Grundfläche ist, so ist sein Inhalt $M = r^2 \pi h$ (oder $\frac{1}{4} d^2 \pi h$), wenn r den Radius der Grundfläche und h die Höhe des Cylinders ausdrückt [Aufg.].

§. 154.

Aufgabe. Jede Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire die Grundfläche der Pyramide mit ihrer Höhe, und dividire das Product durch drey.

Beweis. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas, das mit ihr gleich groſse Grundfläche und Höhe hat [§. 143. *Zus. I.*]. Jedes Prisma wird berechnet, indem man Grundfläche und Höhe multiplicirt; folglich findet man auch den körperlichen Inhalt jeder Pyramide, indem man das Product aus der Grundfläche in die Höhe durch drey dividirt.

Zusatz. Der cubische Inhalt eines jeden senkrechten Kegels ist $= \frac{1}{3} r^2 \pi h$ (oder $\frac{1}{12} d^2 \pi h$) [Aufg. §. 122, 2. und §. 143. *Zus. II.*].

§. 155.

Aufgaben. 1) Ein Prisma dessen Grundfläche $16 \square'$ $7 \square''$, und dessen Höhe $25'$ miſst, soll berechnet werden.

Auflösung. Es ist, nach §. 153., wenn B die Grundfläche und H die Höhe des Prismas ausdrückt, das Prisma oder

$$\begin{aligned} M &= B \cdot H \\ &= 16,07 \cdot 25 \\ &= 401,75^c \\ &= 401^c \ 750^{c''}. \end{aligned}$$

2) Ein Cylinder hat zur Grundfläche einen Kreis, dessen Radius $5' \ 2''$ miſst, seine Höhe beträgt $4'$. Wie groſs ist sein Inhalt?

Auflösung. Es ist nach §. 153. *Zus.*

$$\begin{aligned} \text{Cyl.} &= r^2 \pi h \\ &= [5,2]^2 \cdot 3,141 \cdot 4 \\ &= 339,73056^c \\ &= 339^c \ 730^{c''} \ 560^{c'''} \end{aligned}$$

3) Eine Pyramide von der Höhe 8'' 4''' hat zur Grundfläche 3□' 8□'''. Wie viel beträgt ihr cubischer Inhalt?

Auflösung. Wenn B die Grundfläche und H die Höhe der Pyramide ausdrückt, so ist nach §. 154.

$$\begin{aligned}\text{Pyr.} &= \frac{1}{3} \cdot B \cdot H. \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3,0008 \cdot 0,84 \\ &= 0,840224^c \\ &= 840^{c''} 224^{c'''}. \end{aligned}$$

4) Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Kegels, dessen Höhe 5' 2''' und dessen Radius der Grundfläche 1' 7'' beträgt?

Auflösung. Nach §. 154. Zus. ist

$$\begin{aligned}K. &= \frac{1}{3} r^2 \pi h \\ &= \frac{1}{3} [1,7]^2 \cdot 3,141 \cdot 5,02 \\ &= 15,1896666^c \\ &= 15^c 189^{c''} 666^{c'''} 600^{c''''}. \end{aligned}$$

§. 156.

Aufgabe. Den cubischen Inhalt einer parallel zur Grundfläche abgekürzten Pyramide zu berechnen.

Auflösung. (Fig. 125.) $BCDEbcde$ sey die abgekürzte Pyramide, $bd = a$ die kleinere und $BD = A$ die größere Grundfläche, dann $fF = h$ die Höhe derselben. Die ganze Pyramide sey ABD , ihre Höhe AF , das unbekannte Stück der Höhe $Af = x$, folglich die ganze Höhe $AF = h + x$. Es ist demnach

$$\left. \begin{aligned}\text{Pyr. } ABD &= \frac{1}{3} A [h + x] \\ \text{Pyr. } Abd &= \frac{1}{3} ax\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [\text{§. 154.}] \\ \text{folglich} \end{array}$$

$$\text{Pyr. } ABD - \text{Pyr. } Abd = \frac{1}{3} A [h + x] - \frac{1}{3} ax,$$

$$\text{abgek. Pyr.} = \frac{1}{3} [Ah + (A - a)x].$$

Um den Werth von x zu finden setze man

$$bd : BD = Af^2 : AF^2 \quad [\text{§. 140.}],$$

$$\text{oder } a : A = x^2 : (h + x)^2, \text{ und}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{A} = x : h + x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{h \sqrt{a}}{\sqrt{A} - \sqrt{a}} = \frac{h \sqrt{a} [\sqrt{A} + \sqrt{a}]}{A - a}. \quad \text{Daher}$$

$$\begin{aligned}\text{abgek. Pyr.} &= \frac{1}{3} \left[Ah + \frac{[A - a] h \sqrt{a} [\sqrt{A} + \sqrt{a}]}{A - a} \right] \\ &= \frac{1}{3} h [A + \sqrt{Aa} + a].\end{aligned}$$

Beyspiel. Gesetzt $A = 25 \square'$, $a = 9 \square'$ und $h = 6'$.
Wie groß ist der cubische Inhalt dieser abgekürzten Pyramide?

Auflösung. Es ist nach obigem
abgek. Pyr. $= \frac{1}{3} h [A + \sqrt{Aa} + a]$
 $= \frac{1}{3} 6 [25 + 15 + 9]$
 $= 2 \cdot 49$
 $= 98 \text{c}'.$

§. 157.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines parallel zur Grundfläche abgekürzten senkrechten Kegels aus den beyden Radien R und r und aus seiner Höhe h zu berechnen.

Auflösung. (Fig. 124.) Gesetzt ABC sey der ganze Kegel, AD seine Höhe, das unbekannte Stück der Höhe $Ad = x$, also $AD = h + x$. Nun ist der Inhalt des Kegels $ABC = \frac{1}{3} R^2 \pi [h + x]$ } [§. 154. Z.]
" " " $Abc = \frac{1}{3} r^2 \pi x.$

Dah. d. abgek. Kegel $bcBC = \frac{1}{3} R^2 \pi [h + x] - \frac{1}{3} r^2 \pi x$
 $= \frac{1}{3} \pi [R^2 (h + x) - r^2 x]$
 $= \frac{1}{3} \pi [R^2 h + (R^2 - r^2)x]$
 $= \frac{1}{3} \pi [R^2 h + (R + r)(R - r)x].$

Um den Werth von x zu finden setze man

$$R : r = h + x : x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{rh}{R - r}. \text{ Folglich ist}$$

$$\begin{aligned} \text{abgek. Kegel} &= \frac{1}{3} \pi [R^2 h + \frac{(R + r)(R - r) rh}{R - r}] \\ &= \frac{1}{3} \pi h [R^2 + (R + r)r] \\ &= \frac{1}{3} \pi h [R^2 + Rr + r^2]. \end{aligned}$$

Beyspiel. Gesetzt bey einem abgekürzten Kegel sey $R = 2' 3''$, $r = 1' 4''$ und $h = 7'$. Wie groß ist der körperliche Inhalt des Kegels?

Auflösung. Obiger Aufgabe gemäß ist:

$$\begin{aligned} \text{Abgek. Kegel} &= \frac{1}{3} h \pi [R^2 + Rr + r^2], \text{ daher} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 3,141. [5,29 + 3,22 + 1,96] \\ &= 7 \cdot 1,047 \cdot 10,47 \\ &= 76,73463 \text{c}' \\ &= 76 \text{c}' 734 \text{c}'' 630 \text{c}'''. \end{aligned}$$

§. 158.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu berechnen.

Auflösung. Wenn r den Radius und d den Diameter der Kugel ausdrückt, so ist die allgemeine Formel für die Kugel, oder

$$K = \frac{4}{3} r^3 \pi \text{ oder } = \frac{1}{6} d^3 \pi.$$

Beweis. Jede Kugel ist so groß als eine Pyramide, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel und deren Höhe der Radius der Kugel ist [§. 146.]. Nun ist die Oberfläche der Kugel $= 4 r^2 \pi$ [§. 131. 3.], folglich der körperliche Inhalt der Kugel selbst, oder

$$K = \frac{1}{3} \cdot 4 r^2 \pi \cdot r \quad [\text{§. 154.}]$$

$= \frac{4}{3} r^3 \pi$ oder $= \frac{1}{6} d^3 \pi$, indem $r = \frac{1}{2} d$, folglich $r^3 = \frac{1}{8} d^3$ ist.

1) *Beispiel.* Der Radius einer Kugel mißt 5' 6". Wie groß ist ihr körperlicher Inhalt?

Auflösung. Es ist

$$K = \frac{4}{3} r^3 \pi \quad [\text{Aufg.}]$$

$$= \frac{4}{3} \cdot [5,6]^3 \cdot 3,141$$

$$= 735,479808^c$$

$$= 735^c 479^{c''} 808^{c'''}$$

2) *Beispiel.* Der Diameter einer Kugel sey 2' 7" Duodecimalmaß. Wie groß, im Duodecimalmaße ausgedrückt, ist ihr körperlicher Inhalt?

Auflösung. Man bringe das Maß des Diameters auf die kleinste Benennung, nämlich auf Zoll, d. i. $2' 7'' = 31''$ Duodec. Maß.

Es ist ferner $K = \frac{1}{6} d^3 \pi$ [Aufg.]

$$= \frac{1}{6} \cdot [31]^3 \cdot 3,141$$

$$= 15595,5885^{c''} \text{ Duod. Maß.}$$

$$= 9^c 43^{c''} 1017^{c'''} \text{ Duod. Maß.}$$

I. Zusatz. Aus der Formel für die Kugel ist

$r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$ und $d = \sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}}$, wodurch man aus dem gegebenen cubischen Inhalte einer Kugel ihren Radius oder Diameter finden kann.

II. Zusatz. Sind R und r die Radien zweyer Kugeln K und k , so ist

$$K : k = \frac{4}{3} R^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi = R^3 : r^3, \text{ d. h.}$$

Alle Kugeln verhalten sich, ihrem körperlichen Inhalte nach, zueinander wie die Cubuse ihrer Radien [§. 149. Z.].

§. 159.

Aufgabe. Ein Cylinder, eine Kugel und ein Kegel, wovon ersterer und letzterer zur Grundfläche den größten Kugelkreis der Kugel und zur Höhe den Durchmesser der Kugel haben, sind gegeben. Man soll das Verhältniß finden, in welchem sie, ihrem körperlichen Inhalte nach, zu einander stehen.

Auflösung und Beweis. Es ist:

$$\text{Cyl.} = \text{Bas.} \cdot h. [\S. 153. \text{Zus.}] = r^2 \pi \cdot 2r = 2r^3 \pi.$$

$$\text{Kugel} = \frac{4}{3} r^3 \pi [\S. 158.].$$

$$\text{Kegel} = \frac{1}{3} \text{Bas.} \cdot h. [\S. 154. \text{Zus.}] = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 2r = \frac{2}{3} r^3 \pi.$$

Stellt man diese drey Körper in Proportion, so ist:

$$\begin{aligned} \text{Cyl.} : \text{Kug.} : \text{Keg.} &= 2r^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{2}{3} r^3 \pi \\ &= 6 : 4 : 2 \\ &= 3 : 2 : 1, \text{ d. h.} \end{aligned}$$

der in der Aufgabe gegebene Cylinder ist drey Mahl und die Kugel zwey Mahl so groß, als der Kegel.

§. 160.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines Kugelausschnitts [§. 124. 6.] zu entwickeln.

Auflösung und Beweis. (Fig. 126.) Der Kugelausschnitt *FDGC* ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts und deren Höhe der Radius der Kugel ist [§. 146. Zus.]. Es ist die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts, wenn *DH* = *h* bekannt ist, $2r\pi h$ [§. 131. 2.]; folglich der cubische Inhalt des Kugelausschnitts, oder

$$\text{Sect.} = \frac{1}{3} \text{Basis} \times h [\S. 154. \text{Zus.}]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2r\pi h \cdot r = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

I. Zusatz. Ist $h = r$, so wird $\text{Sect.} = \frac{2}{3} r^3 \pi =$ der Halbkugel, und für $h = 2r$ wird $\text{Sect.} = \frac{2}{3} r^3 \pi =$ der ganzen Kugel [§. 158.].

II. Zusatz. (Fig. 126.) Da $\text{Sect.} = \frac{2}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 2h$, und $r^2 \pi$ die Fläche eines größten Kugelkreises ist, so ist der Kugelausschnitt *FDGC* auch einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis der Ku-

gel und dessen Höhe $= 2h =$ der doppelten Höhe des Kugelabschnitts ist.

§. 161.

Aufgabe. Den cubischen Inhalt eines Kugelabschnitts [§. 124. 4.] zu entwickeln.

Auflösung und Beweis. (Fig. 126.) FDG sey der Kugelabschnitt, $DH = h$ seine Höhe, und r der Radius der Kugel. Der Kugelabschnitt gleicht dem Unterschiede zwischen dem körperlichen Inhalte des Kugelausschnitts $FDGC$ und dem des Kegels FCG , worin die Höhe $HC = r - h$, und $GH^2 = DH \cdot HE$ [§. 80. *Zus. II.*] $= h [2r - h]$ ist. Daher

$$\begin{aligned} \text{Segm. } FDG &= \text{Sect. } FDGC - \text{Kegel } FGC \\ &= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} HG^2 \cdot \pi \cdot HC \text{ [§. 160. u. §. 154. Z.]} \\ &= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h [2r - h] [r - h] \\ &= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h [2r^2 - 3rh + h^2] \\ &= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{2}{3} r^2 \pi h + rh^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi \\ &= rh^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi \\ &= h^2 \pi [r - \frac{1}{3} h]. \end{aligned}$$

I. Zusatz. Ein Kugelabschnitt gleicht einem Cylinder, dessen Grundfläche $h^2 \pi$, d. i. ein Kreis mit dem Radius h , und dessen Höhe $r - \frac{1}{3} h$ ist [Aufg.].

II. Zusatz. (Fig. 126.) Ein Kegel FDG , welcher mit dem Kugelabschnitte Grundfläche und Höhe gemein hat, ist

$$= \frac{1}{3} HG^2 \pi h = \frac{1}{3} h^2 \pi [2r - h].$$

Es verhält sich demnach dieser Kegel zum Segmente, oder

$$\begin{aligned} \text{Keg. : Segm.} &= \frac{1}{3} h^2 \pi [2r - h] : h^2 \pi [r - \frac{1}{3} h] \\ &= 2r - h : 3r - h \\ &= HE : HE + r, \text{ denn es ist } 2r - h \\ &= HE, \text{ folglich auch } 3r - h = 2r - h + r = HE + r. \end{aligned}$$

§. 162.

Aufgabe. Den Inhalt einer körperlichen Zone (Fig. 126.) $FGAB$ aus dem Radius der Kugel r und aus den Entfernungen der Ebenen der beyden Parallelkreise vom Pole der Kugel, nämlich aus $DH = h$ und $DC = H$, zu finden.

Auflösung und Beweis. Man betrachte die körperliche Zone $FGAB$ als den Unterschied der beyden Kugel-Abschnitte ADB und FDG . Es ist also die körperliche Zone $FGAB = \text{Segm. } ADB - \text{Segm. } FDG$.

$$\begin{aligned} &= H^2 \pi \left[r - \frac{1}{3} H \right] - h^2 \pi \left[r - \frac{1}{3} h \right] \quad [\S. 161.] \\ &= \pi \left[H^2 r - \frac{1}{3} H^3 - h^2 r + \frac{1}{3} h^3 \right] \\ &= \pi \left[r (H - h) + \frac{1}{3} (h^3 - H^3) \right] \\ &= \pi \left[r (H + h) (H - h) + \frac{1}{3} (h^3 - H^3) \right]. \end{aligned}$$

§. 163.

Aufgabe. (Fig. 126. a.) Den körperlichen Inhalt eines keilförmigen Kugelausschnittes $ABDE$ aus dem Radius der Kugel r und dem Neigungswinkel $DCE = \alpha$, den die beyden Ebenen ABD und ABE bilden, zu entwickeln.

Auflösung und Beweis. Der Sector $ABDE$ ist der so-vielte Theil der Kugel als der Winkel α , unter welchem sich seine Seitenflächen ABD und ABE neigen, ein Theil von 360° ist. Daher

Sect. $ABDE : \text{Kug.} = \alpha^\circ : 360^\circ$, woraus

$$\begin{aligned} \text{Sect. } ABDE &= \text{Kug.} \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \\ &= \frac{4}{3} r^3 \pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \quad [\S. 158.]. \end{aligned}$$

Geometrische Aufgaben.

§. 1.

Wenn die Namen der *Addition*, *Subtraction*, *Multiplikation*, *Division* etc. so allgemeine Operationen bezeichnen, wie sie in der Buchstabenrechnung genommen werden; so sind sie nicht bloß arithmetische, sondern auch geometrische Operationen. In den algebraischen Ausdrücken kommen einstimmige und entgegengesetzte (positive und negative) Größen vor. Diese einstimmigen, entgegengesetzten, positiven und negativen Größen, sind nicht Größen an sich, sondern in Beziehung aufeinander betrachtet. Diese Betrachtung findet auch bey Linien mit diesen Eigenschaftswörtern statt. Die Bestimmung des Einstimmigen und Entgegengesetzten bey Linien hängt von der einstimmigen oder entgegengesetzten Lage derselben ab; aber es ist willkürlich, welche Lage man positiv oder negativ nennen will; nur ergibt sich aus der Festsetzung der positiven Lage die negative, und aus der Festsetzung der negativen Lage die positive. Heißt die Senkrechte von einem Punkte oberhalb einer geraden Linie auf diese positiv, so heißt die Senkrechte von einem Punkte unterhalb dieser Linie auf diese negativ; und umgekehrt, heißen die letzteren Senkrechten positiv, so sind die ersteren negativ. Eben so, ist die Richtung einer geraden Linie von der Rechten gegen die Linke positiv, so heißt jene von der Linken gegen die Rechte in derselben Linie negativ; oder auch umgekehrt, heißt man erstere negativ, so ist letztere positiv.

Es ist an sich klar, daß Einstimmiges sich vermehrt, vergrößert, Entgegengesetztes aber sich entweder ganz oder nur zum Theile tilget. (Fig. 156.) Die Erzeugung der geraden Linie AC durch die Bewegung eines Punctes in der Richtung von A nach C , und die Erzeugung von BC , als die Bewegung eines Punctes in derselben Richtung, sind einstimmig. Beyde zusammen geben AB . Die Erzeugung der geraden Linie AB , durch die Bewegung eines Punctes in der Richtung von A nach B , und die Erzeugung von BC , als die Bewegung eines Punctes in der Richtung von B gegen A , sind entgegengesetzt. Beyde zusammen geben AC , wo also ein Theil des erzeugten AB durch die Erzeugung von BC aufgehoben wird.

Sollen die Buchstaben a, b , etc. gerade Linien bedeuten, so sind auch $a + b, a - b, \frac{ab}{c}$ etc. gerade Linien.

Es bedeutet $\frac{ab}{c}$, die vierte geometrische Proportionallinie x , von den drey Linien c, a und b ; denn, wenn $c : a = b : x$ ist, so muß $x = \frac{ab}{c}$ seyn. Ebenso bedeutet ab nichts anderes, als die vierte geometrische Proportionallinie y , zwischen einer angenommenen Mafseinheit 1 und a und b , denn es ist $1 : a = b : y$. etc.

Wenn man den bekannten Zeichen der algebraischen Operationen einen so allgemeinen Sinn beylegt, so gibt dieß der Methode, Aufgaben durch Gleichungen aufzulösen, ebenfalls eine große Allgemeinheit, so, daß sie sich nicht allein auf arithmetische, sondern auch auf geometrische Aufgaben anwenden läßt. Nach Auflösung einer Gleichung, worin die Buchstaben Linien bedeuten, zeigt der letzte Ausdruck, worin die unbekannte Größe von den bekannten abgesondert ist, durch welche geometrische Operationen, und in welcher Ordnung die gesuchte Linie aus den gegebenen und bekannten Linien gefunden werden könne. Hätte man die Gleichung

$$x = \frac{mn}{a} + d;$$

so drückt sie aus, daß die Linie x gefunden werde, wenn man zu a, m und n die vierte geometrische Proportionallinie sucht, und dazu die Linie d addirt. Man kann dem-

nach die Auflösung geometrischer Aufgaben eben so, wie die Auflösung arithmetischer Aufgaben durch Gleichungen finden. Die Lösungsmethode ist ganz dieselbe; nur muß man die Fundamentalgleichung einer geometrischen Aufgabe aus geometrischen Gründen herleiten, und deswegen muß derjenige, welcher diese Methode bey geometrischen Aufgaben in Anwendung bringen will, wenigstens mit den ersten Gründen der Geometrie bekannt seyn.

Das Hauptgesetz bey der Bildung der Fundamentalgleichung ist: *Man nehme an, die gesuchte Grösse sey bereits gefunden, und drücke sie durch ein allgemeines Zeichen z. B. x etc. aus. Hierauf verbinde man sie, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, mit den gegebenen Größen, und entwickle nach den bekannten Reductionsgesetzen der Gleichungen den Werth der unbekannten Grösse.*

Bey geometrischen Aufgaben schließt man durch die genaue Anschauung der Eigenschaften einer gegebenen Figur auf den Zusammenhang des Gegebenen mit dem Gesuchten; auch wird das Construiren passender Hilfslinien das Auffinden der Beziehungen oder des Zusammenhanges der unbekannten mit den bekannten Größen bedeutend erleichtern, ja oft sogar nur das einzige Mittel für die Lösung der Aufgabe seyn. Die algebraische Bezeichnung und Operation dient dazu, die nöthigen Schlüsse abzukürzen, und nach der Auflösung der Gleichung läßt sich das gefundene Resultat aus der algebraischen Zeichensprache in die geometrische Sprache wieder übersetzen.

Ehe wir zur analytischen Auflösung der verschiedenen geometrischen Probleme übergehen, wollen wir das Vorzüglichste anführen über die

Construction von Größen,
welche durch algebraische Ausdrücke gegeben
sind.

§. 2.

Aufgabe. Man soll $a + b$ geometrisch construiren, wenn a und b gerade Linien bedeuten.

Auflösung. (Fig. 157.) Man ziehe eine gerade Linie

MN , und trage darauf $MQ = a$ und an Q in derselben Richtung $QP = b$ auf; so ist $MP = a + b$.

I. Zusatz. Ist von den beyden Linien a und b eine z. B. b negativ, oder $a - b$ zu construiren, so mache man $AB = a$, und nehme in der entgegengesetzten Richtung, von B gegen A , $BC = b$ weg; dann ist $AC = a - b$.

II. Zusatz. Ist $a - c$ zu construiren, die Linie c aber gröfser als a , so ziehe man eine gerade Linie $DE = a$, und nehme nach der entgegengesetzten Richtung, von E nach D , $EF = c$ weg; dann ist $DF = a - c$.

III. Zusatz. Für die Construction des Ausdruckes $a - b - c$ mache man $AB = a$, von B gegen A hin trage man $BC = b$, und in derselben Richtung an C die Linie $CG = c$ auf; dann ist $AG = a - b - c$.

§. 3.

Aufgabe. Man soll die Ausdrücke $4a$, $\frac{2}{3}a$, $1\frac{5}{4}a$ construiren, wenn a eine gerade Linie ausdrückt.

Auflösung. 1) Um den Ausdruck $4a$ zu construiren trage man die gerade Linie a vier Mahl nach einer Richtung so auf, daß der Endpunct jedes vorhergehenden Theiles der Anfangspunct des folgenden ist.

2) Bey der Construction des Ausdruckes $\frac{2}{3}a$ theile man die gerade Linie a zuerst, nach §. 74. *Zus.*, in drey gleiche Theile, und trage davon einen Theil zwey Mahl nach der positiven Richtung auf.

3) Um $1\frac{5}{4}a$ zu construiren, setze man an die gerade Linie a , nach der positiven Richtung hin, $\frac{5}{4}a$ an, dessen Construction man wie 2) findet.

§. 4.

Aufgabe. Man construire $a b$.

Auflösung. Der Ausdruck ab , wenn a und b gerade Linien sind, kann, für sich allein genommen, nicht construiert werden; denn a mit b multipliciren heist, aus a eine Gröfse erzeugen, wie b aus 1 entstanden ist. Gesetzt nun, a sey eine gerade Linie und b eine Zahl, so ist bekannt, wie b aus 1 entstanden ist, und man kann das Product ab so construiren, wie §. 3. gezeigt wurde. Ist aber b auch eine gerade Linie, so mangelt die Einheit, aus der b

als erzeugt vorgestellt wird, folglich kann man auch ab aus a nach b nicht ableiten.

Soll jedoch der Ausdruck ab , wenn a und b gerade Linien sind, construierbar werden, so muß noch ein Drittes, die Einheit (eine bestimmte Linie), gegeben seyn. In diesem Falle ist dann $1 : b = a : ab$ d. i. ab würde die vierte geometrische Proportionallinie zu 1 , b und a seyn. Die Construction von ab geschieht dann nach §. 74. 2. Man construiere nämlich (Fig. 91.) einen Winkel BAC , nehme AD als die Einheit, und mache $AG = b$ und $DF = a$, so wird, wenn man DG und $FH \parallel DG$ zieht, $GH = ab$ für die Einheit AD .

§. 5.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{ab}{c}$ construirt.

Auflösung. Hier ist $cx = ab$ und
 $c : a = b : x$.

Es ist also x die vierte geometrische Proportionallinie zu c , a und b . Die Construction dieses Ausdrucks gibt §. 74. 2.

Zusatz. Ist $x = a^2$ zu construiren, so setze man, indem man die Längeneinheit 1 als gegeben betrachtet,

$$x = \frac{a^2}{1}, \text{ daher}$$

$$1 \cdot x = a \cdot a \text{ und}$$

$$1 : a = a : x.$$

Man erhält also x als dritte geometrische Proportionallinie zur Einheit 1 und a . Die Construction geschieht nach §. 74. 2., nur ist zu bemerken, daß für diesen Fall (Fig. 91.) $AG = DF = a$ gemacht werden muß.

§. 6.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc}{de}$ construirt.

Auflösung. Man setze $y = \frac{ab}{d}$, also ist

$$x = \frac{yc}{e} \text{ und } ex = yc, \text{ mithin}$$

$$e : y = c : x,$$

folglich ist x die vierte Proportionallinie von e , y und c

Der Ausdruck $y = \frac{ab}{d}$ läßt sich nach §. 5. und hierauf $x = \frac{yc}{e}$ nach demselben §. construiren.

Zusatz. Soll $x = \frac{abc}{m}$ construirt werden, so setze man $y = \frac{ab}{m}$, also $m : a = b : y$, und man findet y nach §. 5. Hierauf ist $x = y \cdot c$, dessen Construction nach §. 4. sich ergibt.

§. 7.

Aufgabe. Es soll $x = \sqrt{a}$ construirt werden.

Auflösung. Wenn $x = \sqrt{a}$ ist, so muß auch $x^2 = a$, und, wenn man wieder die Längeneinheit 1 zu Hülfe nimmt, $1 : x = x : a$ seyn.

Es ist also x die mittlere geometrische Proportionalinie zwischen der Längeneinheit 1 und der Linie a . Die Construction geschieht nach §. 81.

I. Zusatz. Soll $y = \sqrt{ab}$ construirt werden, so kann dieß ohne Hülfe der Längeneinheit nach §. 81. geschehen, denn es ist dann

$$a : y = y : b. \text{ etc.}$$

II. Zusatz. Dafs die Wurzel aus einer Gröfse $+$ oder $-$ seyn kann, also bey $x = \sqrt{a}$ (Aufgabe) und $y = \sqrt{ab}$ [Zus. I.] x und y positiv oder negativ werden können, zeigt auch die Construction, indem die mittlere Proportionalinie sowohl über als unter dem Diameter des Kreises, also in zwey entgegengesetzten Richtungen construirt werden kann.

§. 8.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{a^2 - b^2}{d}$ construirt.

Auflösung. $x = \frac{a^2 - b^2}{d} = \frac{[a + b][a - b]}{d}$, also

$$dx = [a + b][a - b] \text{ und}$$

$$d : a + b = a - b : x, \text{ d. h.}$$

x ist die vierte geometrische Proportionallinie zu d , zur Summe der Linien a und b , und zur Differenz derselben.

§. 9.

Aufgabe. Man construiren $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Auflösung. Man construire ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen Katheten a und b sind, so wird die Hypotenuse desselben die gesuchte Seite x . Denn es ist nach §. 80. *Zus. III.* $x^2 = a^2 + b^2$, folglich

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

I. Zusatz. Soll $x = \sqrt{d^2 - a^2}$ construirt werden, so construire man einen rechten Winkel MNO (Fig. 65.) mache $NP = a$, beschreibe mit $PQ = d$ aus P einen Kreisbogen, der den andern Schenkel des Winkels in Q schneidet; dann ist $NQ = x$ die verlangte Linie. Denn nach §. 80. *Zus. III.* ist

$$x^2 + a^2 = d^2, \text{ also auch } x^2 = d^2 - a^2 \text{ und}$$

$$x = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

II. Zusatz. Würde im Ausdrucke $x = \sqrt{d^2 - a^2}$ die Linie a gröfser als d , so ist x unmöglich; denn der Kreis, mit d aus P beschrieben, würde den andern Schenkel des Winkels nicht schneiden. [§. 17. *Zus.*]

III. Zusatz. Soll $z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ construirt werden, so suche man zuerst $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ [Aufg.], sodann zum rechtwinkligen Dreyecke, dessen eine Kathete q und die andere c ist, die Hypotenuse, so ist diese die gesuchte Seite z . Denn es ist dann

$$\begin{aligned} z^2 &= q^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2, \text{ folglich} \\ z &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

IV. Zusatz. Soll man $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ construiren, so kann diefs dadurch geschehen, dafs man zuerst $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ sucht [Aufg.], und dann ein rechtwinkliges Dreyeck construirt, dessen Hypotenuse q und dessen eine Kathete c ist; dann mufs die zweyte Kathete die verlangte Seite y seyn. Denn es ist dann im zuletzt construirten Dreyecke

$$\begin{aligned} y^2 &= q^2 - c^2, \text{ also auch} \\ &= a^2 + b^2 - c^2, \text{ und} \\ y &= \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}. \end{aligned}$$

V. Zusatz. Um $m = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ zu construiren be-

trachte man $m = \sqrt{a^2 + [\frac{b}{2}]^2}$, welches mit obigem Ausdrücke einerley ist, und construire die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen beyde Katheten a und $\frac{b}{2}$ sind. Die Construction von $n = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ oder $n = \sqrt{a^2 - [\frac{b}{2}]^2}$ ist, wie im II. Zusatze.

§. 10.

Aufgabe. Man soll $x = \sqrt{2}$ construiren.

Auflösung. Hier muß wieder irgend eine Längeneinheit $= 1$, als Maß, gegeben seyn. Es wird also $x^2 = 2$, folglich

$$1 : x = x : 2.$$

Man finde demnach zur Länge 1 und zur Länge 2 die mittlere geometrische Proportionallinie [§. 81.].

I. Zusatz. Soll man $x = \sqrt{3}$ construiren, so setze man wieder die Längeneinheit $= 1$, und es ist, aus

$$x = \sqrt{3}, \quad x^2 = 3, \quad \text{folglich}$$

$$1 : x : 3, \text{ d. i.}$$

die Linie x ist zwischen den Längen 1 und 3 die mittlere Proportionale.

Auf ähnliche Art findet man die Construction von $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ etc.

II. Zusatz. Läßt sich die Zahl unter dem Wurzel-Zeichen in Factoren zerlegen, so wird die Construction etwas einfacher. Z. B. wenn $x = \sqrt{28}$, so ist auch $x^2 = 4 \cdot 7$, also

$$4 : x : 7 \text{ etc.}$$

§. 11.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{1}{2} a \sqrt{5}$ construiert.

Auflösung.

Es ist $x = \frac{1}{2} a \sqrt{5} = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} a^2} = \sqrt{a^2 + [\frac{1}{2} a]^2}$, d. h. x ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen eine Kathete a und dessen andere Kathete $\frac{1}{2} a$ ist.

Zusatz. Um $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ zu construiren, setze man $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} a^2} = \sqrt{a^2 - [\frac{1}{2} a]^2}$. und es ist x die Kathete eines rechtwinkligen Dreyeckes, wovon a die Hypotenuse und $\frac{1}{2} a$ eine Kathete ist.

§. 12.

Aufgabe. Man soll $x = \frac{1}{2} a [\sqrt{5} - 1]$ construiren.

Auflösung. Es ist $x = \frac{1}{2} a [\sqrt{5} - 1] = \frac{1}{2} a \sqrt{5} - \frac{1}{2} a$. Um diesen letzten Ausdruck zu construiren, schneide man von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen beyde Katheten a und $\frac{1}{2} a$ [§. 11.] sind, die Länge $\frac{1}{2} a$ ab.

§. 13.

Aufgabe. Man construire $x = \frac{a^2 + b^2}{d}$.

Auflösung. Man setze $a^2 + b^2 = y^2$, so ist $x = \frac{a^2 + b^2}{d} = \frac{y^2}{d}$. Die Construction von $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ findet man aus §. 9., und die für $x = \frac{y^2}{d}$ aus §. 81. indem aus $x = \frac{y^2}{d}$ die Proportion $d : y : x$ entsteht.

Zusatz. Die Construction von $x = \frac{a^2 - b^2}{d}$ kann man, aufser der in §. 8. gezeigten Methode, auch auf obige Art vornehmen, nur ist $a^2 - b^2 = y^2$ zu setzen, und y zuerst nach §. 9. *Zus. I.* zu construiren.

§. 14.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{a^2 b - bc^2}{ad} = \frac{ab}{d} - \frac{bc^2}{ad}$ construirt.

Auflösung. Man setze $\frac{ab}{d} = y$, dessen Construction aus §. 5. bekannt ist. Das zweyte Glied $\frac{bc^2}{ad} = v$ wird so gefunden:

Man setze $\frac{bc}{a} = z$, construire z nach §. 5., und dann ist $\frac{bc^2}{ad} = \frac{zc}{d} = v$, also kann auch v nach §. 5. construirt werden. Daher

$$x = y - v. \quad [\text{§. 2. Zus. I.}]$$

§. 15.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc + def}{ab + cd}$ construirt.

Auflösung. Hier setze man $ab + cd = ay$; hieraus

folgt: $y = \frac{ab + cd}{a} = b + \frac{cd}{a}$, und es kann nach dem Bisherigen y construirt werden [§. 5. u. 2.].

Nun setze man $x = \frac{abc + def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}$, so lassen sich die beyden Längen $\frac{bc}{y}$ und $\frac{def}{ay}$ nach §. 5. 6. u. nach §. 2. auch x selbst construiren.

§. 16.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc - def}{ab - cd}$ construirt.

Auflösung. Man setze hier $ab - cd = ay$, woraus $y = b - \frac{cd}{a}$. Daraus kann man y finden [§. 5. u. 2.].

Nun setze man $x = \frac{abc - def}{ay} = \frac{bc}{y} - \frac{def}{ay}$, so lassen sich beyde Längen $\frac{bc}{y}$ und $\frac{def}{ay}$ [nach §. 5. 6. u. 2.], folglich auch x construiren.

§. 17.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc^2 - a^2 b^2}{abc + c^3}$ construirt.

Auflösung. Man setze $\frac{ab}{c} = y$, also $c : a = b : y$, und finde daraus y [§. 74. 2.]. Aus

$$x = \frac{abc^2 - a^2 b^2}{abc + c^3} \text{ wird dann}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{ab [c^2 - ab]}{c [ab + c^2]} = \frac{cy [c^2 - cy]}{c [cy + c^2]} \\ &= \frac{c^2 y [c - y]}{c^2 [c + y]} = \frac{y [c - y]}{c + y}, \text{ also auch} \end{aligned}$$

$c + y : c - y = y : x$, woraus x nach §. 74. 2. construirt werden kann.

§. 18.

Aufgabe. Es werde $x = \sqrt{\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}}$ construirt.

Auflösung. Hier setze man $\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ay$, also $y =$

$\frac{b^2}{b+c} + \frac{cd^2}{a[b+c]}$. Ferner setze man $\frac{b^2}{b+c} = z$, also $b+c : b : z$, woraus z nach §. 74. 2., wie §. 5. *Zus.* construirt werden kann.

In $\frac{cd^2}{a[b+c]} = v$ setze man $\frac{cd}{a} = p$ und construiere p nach §. 5. Es ist dann $\frac{cd^2}{a[b+c]} = \frac{pd}{b+c} = v$, woraus $b+c : p = d : v$ ist, und v wie oben nach §. 74. 2. construirt werden kann.

Es ist demnach $y = z + v$ und $ay = a[x+v]$, mithin $x = \sqrt{a(z+v)}$ oder $x^2 = a[x+v]$, also auch $a : x : z + v$ d. h.

x ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen a und $x+v$ [§. 81.]. Da z und v durch die Längen a, b, c und d bestimmt wurden, so ist also auch x die gesuchte Länge nach dem Mafse der Längen a, b, c, d .

§. 19.

Aufgabe. Es werde $x = \sqrt{ac+bd}$ construirt.

Auflösung. Hier setze man $bd = ay$, also $y = \frac{bd}{a}$ und es wird dann

$$x = \sqrt{ac+ay}$$

$$x = \sqrt{a(c+y)}.$$

Nun läßt sich $y = \frac{bd}{a}$, indem $a : b = d : y$ ist, nach §. 74. 2. construiren. Da ferner auch $x^2 = a[c+y]$, also auch $a : x : c+y$ ist, kann x nach §. 81. als mittlere geometrische Proportionallinie zwischen a und $c+y$ construirt werden.

§. 20.

Aufgabe. Man soll $x = \sqrt{a^2+bc+\frac{def}{g}}$ construiren.

Auflösung. Man setze $bc = m^2$, so findet man $m = \sqrt{bc}$, und dieses ist nach §. 81. zu construiren. Ferner setze man $\frac{def}{g} = n^2$, also $n = \sqrt{\frac{def}{g}}$. Hier suche man zuerst $\frac{de}{g}$ [§. 5.], sodann die mittlere geometrische Pro-

portionallinie n zwischen $\frac{de}{g}$ und f , indem $n^2 = \frac{def}{g}$, also $f : n : \frac{de}{g}$ ist [§. 81.].

Hat man nun m und n gefunden, so ist $x = \sqrt{a^2 + bc + \frac{def}{g}} = \sqrt{a^2 + m^2 + n^2}$ nach §. 9. Zus. III. leicht zu construiren.

§. 21.

Aufgabe. Man construire $x = \sqrt{\frac{abcd}{eg}}$.

Auflösung. Man setze $cd = m^2$ und $eg = n^2$; so läßt sich m aus cd und n aus eg construiren [§. 7. Zus. I.]. Es ist demnach

$$x = \sqrt{\frac{abcd}{eg}} = \sqrt{ab \frac{m^2}{n^2}} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{n^2}} = \frac{m}{n} \sqrt{ab}.$$

Setzt man endlich $\sqrt{ab} = y$, so läßt sich y leicht nach §. 81. construiren, und es ist $x = \frac{my}{n}$, also auch $n : m = y : x$, folglich x selbst durch Construction aus §. 74. 2 zu finden.

Vermischte geometrische Aufgaben.

§. 22.

Aufgabe. In einem Parallelogramme mißt die Grundlinie $20' 7''$ und die Höhe $10' 3''$. Man soll ein anderes von gleichem Inhalte mit einer $25'$ langen Grundlinie angeben. Wie groß ist die Höhe zu nehmen?

Auflösung. Die Höhe des verlangten Parallelogramms sey x , sodann wird sein Inhalt, indem seine Grundlinie $25'$ beträgt, $= 25 \cdot x$ [§. 97.]. Der Inhalt des gegebenen Parallelogramms ist $= 20,7 \cdot 10,3$. Da nun gemäß der Aufgabe beyde Parallelogramme gleich groß seyn sollen, so muß

$$25 x = 20,7 \cdot 10,3, \text{ also}$$

$$x = \frac{20,7 \cdot 10,3}{25} = 8' 2'' \text{ seyn.}$$

Es ist demnach die Höhe des verlangten Parallelogramms $8' 2''$.

§. 23.

Aufgabe. (Fig. 158.) Im rechtwinkligen Dreyecke

ABC ist $AB = 307'$, die Hypotenuse AC aber um $102'$ gröfser, als die andere Kathete BC . Wie grofs ist BC und AC ?

Auflösung. Im rechtwinkligen Dreyecke ABC sey $AB = 307' = a$, die unbekannte Kathete $BC = x$, folglich die Hypotenuse $AC = BC + 102' = x + n$, wenn $n = 102'$ den Unterschied zwischen der Hypotenuse und der unbekannten Kathete bezeichnet. Nach §. 80. *Zus. III.* ist

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2, \text{ oder} \\ [x + n]^2 &= a^2 + x^2, \text{ folglich} \\ x^2 + 2nx + n^2 &= a^2 + x^2 \\ 2nx &= a^2 - n^2 \\ x &= \frac{a^2 - n^2}{2n} = \frac{[a+n][a-n]}{2n}. \end{aligned}$$

Die Hypotenuse $AC = x + n = \frac{a^2 - n^2}{2n} + n = \frac{a^2 + n^2}{2n}$

Da nun der Angabe gemäfs $a = 307'$ und $n = 102'$ ist, so wird

$$\begin{aligned} BC = x &= \frac{(307 + 102)(307 - 102)}{2 \cdot 102} \\ &= \frac{409 \cdot 205}{204} = 411'. \end{aligned}$$

Es ist also die andere Kathete $BC = 411'$ und die Hypotenuse $AC = BC + 102 = 513'$.

§. 24.

Aufgabe. (Fig. 158.). Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreyeckes ABC sey $60000 \square'$ und die eine Kathete BC um $100'$ gröfser als die andere. Wie grofs ist jede?

Auflösung. Gesetzt $AB = x$, so ist $BC = x + n$, wenn $n = 100$ den Unterschied beyder Katheten ausdrückt; folglich der Inhalt ($M = 60000 \square'$) des $\triangle ABC$ nach §. 97. *Zus. II.*, oder

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} x [x + n], \text{ also} \\ 2M &= x^2 + nx \\ x^2 + nx + [\frac{n}{2}]^2 &= 2M + \frac{n^2}{4} \\ x &= -\frac{n}{2} \pm \sqrt{2M + \frac{n^2}{4}} \\ &= -\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{8M + n^2} = \frac{-n \pm \sqrt{8M + n^2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Daher } BC = x + n = \frac{n \pm \sqrt{[8M + n^2]}}{2}.$$

Substituirt man die Zahlenwerthe, so ist

$$\begin{aligned} x &= \frac{100 \pm \sqrt{[480000 + 10000]}}{2} = -50 \pm \frac{700}{2} \\ &= -50 \pm 350 = 300'. \end{aligned}$$

Also ist die eine Kathete $= 300'$ die andere $= 400'$.

Da $x = -50 \pm 350 = 300$ oder -400 , also $x + n = 300 + 100 = 400$, oder $= -400 + 100 = -300$ ist, so drückt dieß aus, daß die beyden Katheten, außer den Werthen $300'$ und $400'$, auch noch die von $-400'$ und $-300'$ d. i. eine entgegengesetzte Lage haben können, wie z. B. $BE = 400'$, entgegengesetzt von AB , und $BD = 300'$ entgegengesetzt von BC (mithin auch das $\triangle DBE$ selbst entgegengesetzt dem $\triangle ABC$).

§. 25.

Aufgabe. In einem rechtwinklig - gleichschenkligen Dreyecke ist die Summe aller Seiten $= a$; wie groß jede?

Auflösung. Ist ein Schenkel dieses Dreyeckes $= x$, so ist die Hypotenuse $= \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$, folglich

$$2x + x\sqrt{2} = a \text{ und}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2 \pm \sqrt{2}} = \frac{1}{2} a [2 \mp \sqrt{2}] \\ &= a [1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Für diese Aufgabe ist $x = a [1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}]$.

Es ist also jede Kathete $a [1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}]$, folglich die Hypotenuse $h = \sqrt{(x^2 + x^2)}$ [§. 80. Zus. III.]

$$\begin{aligned} &= x\sqrt{2} = a [1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}] \sqrt{2} \\ &= a [\sqrt{2} - 1]. \end{aligned}$$

Sind diese drey Werthe der beyden Katheten und der Hypotenuse richtig, so muß ihre Summe wieder a geben. Nämlich:

$$\begin{aligned} h + x + x &= a [\sqrt{2} - 1] + 2a [1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}] \\ &= a\sqrt{2} - a + 2a - a\sqrt{2} = a. \end{aligned}$$

Construction. (Fig. 159. a.) Gesetzt $MN = a$ sey der gegebene Perimeter. Man ziehe eine gerade Linie AQ , mache $AB = a$, und $BC = \frac{1}{2}a$, beschreibe über AC einen Halbkreis, und errichte in B auf AC die Senkrechte DB . Endlich beschreibe man mit BD aus B einen Kreis-

Bogen, der AB in E schneidet, so ist AE die verlangte Kathete x , woraus man dann leicht das in der Aufgabe gegebene Dreyeck selbst construiren kann.

Beweis. Es ist gemäß der Constr. $BD = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} = BE$, ferner $AE = AB - BE = a - \frac{a}{2}\sqrt{2} = x$. [Aufl.]

(Fig. 159. b.) Bey der Construction von h setze man MN und $NO = a$ unterm rechten Winkel zusammen, ziehe MO , und mache $PO = NO$, so ist $MP = MO - PO = a [\sqrt{2} - 1] = h$.

§. 26.

Aufgabe. (Fig. 160.) Die drey Seiten eines Dreyeckes sind gegeben, nämlich $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$. Man soll daraus den Inhalt des Dreyeckes finden.

Auflösung. Man fälle die Senkrechte AD .

Es ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot AD$.

Um AD zu suchen, betrachte man die beyden rechtwinkligen Dreyecke ABD und ADC , und setze $BD = x$, folglich $DC = a - x$. Es ist nach §. 80. Zusatz III.

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = c^2 - x^2$$

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = b^2 - [a - x]^2$$

$$\text{folgl. } c^2 - x^2 = b^2 - [a - x]^2$$

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{ ist.}$$

$$\text{Daher } AD^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$$

$$= \left[c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right] \left[c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right]$$

$$= \frac{[2ac + a^2 + c^2 - b^2][2ac - a^2 - c^2 + b^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{[a + b + c][a + c - b][a + b - c][b + c - a]}{4a^2}, \text{ also}$$

$$AD = \frac{\sqrt{[a + b + c][b + c - a][a + c - b][a + b - c]}}{2a}$$

Folglich das Dreyeck oder

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot AD$$

$$= \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}}{2a}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[a+b+c][b+c-a][a+c-b][a+b-c]}.$$

I. Zusatz. Ist das Dreyeck gleichschenkelig, also $b = c$, so wird aus obiger Formel folgende:

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{4} \sqrt{[a+2b][2b-a]a.a} \\ &= \frac{a}{4} \sqrt{[2b+a][2b-a]}. \end{aligned}$$

II. Zusatz. Ist das Dreyeck gleichseitig, d. i. $a = b = c$, so wird aus obiger Formel

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{4} \sqrt{[3a.a.a.a]} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{3} a^2 = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

§. 27.

Aufgabe. (Fig. 161.). Eine gerade Linie AB soll im äufsern und mittlern Verhältnisse (in extrema et media ratione) getheilt werden, d. h. so, daß sich die ganze Linie zum gröfsern Theile eben so verhalte, wie dieser gröfsere Theil zum kleineren, folglich der gröfsere Abschnitt (Theil) die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der ganzen Linie und ihrem kleineren Theile wird.

1) *Auflösung.* (synthetisch) An AB setze man die Senkrechte $BD = \frac{1}{2} AB$, ziehe AD , und mache $DE = BD$ und $AC = AE$, so ist

$$AB : AC : CB.$$

Beweis.

Es ist $AD^2 = AB^2 + BD^2$ [§. 80. Zus. III.].

Nun ist $AD = AE + ED = AC + DB$, folglich auch

$$[AC+DB]^2 = AB^2 + BD^2, \text{ oder}$$

$$AC^2 + 2.BD.AC + BD^2 = AB^2 + BD^2, \text{ und, da}$$

$$2 BD = AB \text{ ist,}$$

$$AC^2 + AB.AC = AB^2, \text{ also}$$

$$AC^2 = AB^2 - AB.AC$$

$$= AB[AB - AC], \text{ oder}$$

$$AC^2 = AB.CB, \text{ folglich auch}$$

$$AB : AC : CB.$$

2) *Auflösung.* (analytisch) Gesetzt die Auflösung sey geschehen, und AC und CB seyen die beyden ver-

langten Theile. Man setze $AC = x$, also $CB = AB - x = n - x$, wenn $n = AB$ ist.

Es soll dann:

$n : x = x : n - x$ seyn, folglich

$$x^2 = n^2 - nx \text{ oder}$$

$$x^2 + nx = n^2, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}n^2}$$

$= \frac{1}{2}n [\sqrt{5} - 1]$, indem hier nur das Zeichen $+$ vor der Wurzelgröfse genommen werden kann.

Um obigen Ausdruck, $x = \frac{1}{2}n [\sqrt{5} - 1]$, zu construiren, nehme man jenen, nämlich

$$x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}n^2}$$

$= \sqrt{n^2 + (\frac{1}{2}n)^2} - \frac{1}{2}n$, d. h. man construire $\sqrt{n^2 + (\frac{1}{2}n)^2}$ (d. i. die Hypotenuse AD eines rechtwinkligen Dreyeckes ABD , dessen eine Kathete $AB = n$ und dessen andere $BD = \frac{1}{2}n$ ist) und nehme davon $DE = \frac{1}{2}n$ weg, so ist $AE = AC = AD - DE = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}n^2} - \frac{1}{2}n = x$, folglich AE oder AC der grössere Abschnitt.

Man theilt demnach eine gerade Linie $AB = n$ nach dem äufsern und mittlern Verhältnisse, indem man auf ihr ihre Hälfte $DB = \frac{1}{2}n$ senkrecht errichtet, sodann AD zieht, und davon AE dadurch abschneidet, indem man mit DB aus D einen Kreisbogen EB zieht. Es ist dann AE , oder auch AC , wenn man mit AE aus A den Bogen EC beschreibt, der grössere und CB der kleinere verlangte Theil der Linie AB .

§. 28.

Aufgaben. (Fig. 162.) Aus der Seite $AB = a$ eines regulären Vieleckes in einem Kreise, und dem Radius r dieses Kreises die Seite $FG = b$ des gleichnamigen regulären Vieleckes um den Kreis zu finden.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$ sey die Seite des regulären n Eckes im Kreise. Man fälle CD senkrecht auf AB und construire die Tangente FG für den Punct D , welche durch die verlängerten Radien AC und BC in F und G geschnitten wird. Die Linie FG ist dann die verlangte Seite des regulären n Eckes um den Kreis.

Es ist $\triangle FGC \sim \triangle ABC$, dann

$CE = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2}$, ferner
 $AB : FG = CE : CD$ [§. 83.], oder

$a : b = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2} : r$, woraus

$$b = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{2ar \sqrt{4r^2 - a^2}}{4r^2 - a^2}$$

$$b = \frac{2ar \sqrt{(2r + a)(2r - a)}}{[2r + a][2r - a]}.$$

Zusatz. Will man umgekehrt aus der Seite $FG = b$ eines regulären n Eckes um den Kreis und aus dessen Radius r die Seite $AB = a$ des regulären n Eckes im Kreise finden, so ist aus obiger Proportion

$AB : FG = CE : CD$ oder

$$a : b = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} : r$$

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}$$

$$\frac{a^2 r^2}{b^2} = r^2 - \frac{1}{4} a^2$$

$$\frac{a^2 r^2}{b^2} + \frac{a^2}{4} = r^2$$

$$4a^2 r^2 + a^2 b^2 = 4b^2 r^2$$

$$a^2 [4r^2 + b^2] = 4b^2 r^2$$

$$a = \sqrt{\frac{4b^2 r^2}{4r^2 + b^2}} = \frac{2br}{\sqrt{4r^2 + b^2}}$$

$$= \frac{2br \sqrt{4r^2 + b^2}}{4r^2 + b^2}.$$

§. 29.

Aufgabe. Der Radius r eines Kreises ist gegeben. Man soll die Seite des regulären Dreyeckes in und um den Kreis finden.

Auflösung. 1) Es ist nach §. 65. die Seite eines regulären Sechseckes im Kreise dem Radius gleich; ferner nach §. 86. *Zus. II.*

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2}$$

die Formel, um aus der Seite eines regulären $2n$ Eckes im Kreise, dessen Radius r ist, die des regulären n Eckes in demselben Kreise zu finden. Es ist also für die Seite des regulären Dreyeckes im Kreise

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2} \text{ und, da } b = r \text{ ist,}$$

$$a = \frac{r}{r} \sqrt{[4r^2 - r^2]} = r\sqrt{3}.$$

Für den Radius $r = 1$ ist $a = 1,73205. \dots$

Um die Seite des regulären Dreyeckes im Kreise, oder $a = r\sqrt{3}$, zu construiren, folgere man, aus

$$a = r\sqrt{3}$$

$$a^2 = 3r^2. \text{ Es ist demnach}$$

$3r : a : r$, d. h. die verlangte Seite des Dreyeckes ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem dreyfachen und einfachen Radius. Ist z. B. Fig. 163. $AB = r$ der Radius des Kreises, so verlängere man AB , und trage auf die Verlängerung $BC = CD = DE = r$ auf, beschreibe endlich über AE einen Halbkreis, und errichte in D die Senkrechte DF , so ist diese die Seite des verlangten Dreyeckes [§. 80. Z. II.] geom. Aufg. §. 10. Z. I].

2) Um die Seite des regulären Dreyeckes um den Kreis zu finden, nehme man aus §. 28.

$$b = \frac{2ar}{\sqrt{[4r^2 - a^2]}}, \text{ wo } a = r\sqrt{3} \text{ [1.] ist,}$$

$$\text{also } b = \frac{2r^2\sqrt{3}}{\sqrt{[4r^2 - 3r^2]}} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{r} = 2r\sqrt{3}, \text{ d. h.}$$

die Seite des regulären Dreyeckes um den Kreis ist doppelt so groß als die des regulären Dreyeckes im Kreise.

Für den Radius $r = 1$ ist $b = 3,4641 \dots$

§. 30.

Aufgabe. Der Radius eines Kreises ist gegeben. Man soll die Seite des Quadrates in, und die des Quadrates um den Kreis finden.

Auflösung. 1) Die Seite des Quadrates im Kreise, dessen Radius r ist, ist die Sehne eines Quadranten, folglich [Fig. 81.], wenn $CB = x$ und $CI = IB = r$ ist,

$$CB^2 = CI^2 + IB^2 \text{ [§. 80. Zus. III.], also}$$

$$x = \sqrt{[r^2 + r^2]} \\ = r\sqrt{2}.$$

Für den Radius $= 1$, ist $x = 1,4142 \dots$

Die Construction von $x = r\sqrt{2}$ ist nach §. 10. der geometrischen Aufgaben nicht schwierig.

2) Die Seite des Quadrates um den Kreis ist der Diameter $= 2r$.

§. 31.

Aufgabe. Die Seite des regulären Zehneckes im Kreise, dessen Radius r ist, zu finden, und zu construiren.

Auflösung. (Fig. 164.) Gesetzt $AB = x$ sey die Seite des regulären Zehneckes im Kreise und $AK = BK = r$ Radien. Man verlängere AB über B , und mache die Verlängerung $BD = BK = r$, und ziehe DK . Indem AB Sehne eines Bogens ist, welcher der zehnte Theil der ganzen Peripherie ist, so muß $o = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, also $m = \frac{1}{2}[180^\circ - 36^\circ] = 72^\circ = n$ seyn.

Da $BD = BK$ ist, so muß auch $p = q = \frac{1}{2}m = 36^\circ$ seyn. Es ist also

$$\begin{aligned} p &= o, \text{ ferner} \\ n &= n, \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ADK &\cong \triangle ABK \text{ [§. 76.].} \text{ Daher} \\ AD : AK &= AK : AB, \text{ oder} \\ x + r : r &= r : x, \text{ folglich} \\ x^2 + rx &= r^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + r x + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5}{4} r^2$$

$$x + \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \sqrt{5}$$

$$x = \frac{r}{2} \sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} [\sqrt{5} - 1],$$

welcher Ausdruck sich nach §. 12. oder §. 27. 2. leicht construiren läßt. Man errichte nämlich, Fig. 165., auf dem Endpunkte des Radius $MN = r$ die Senkrechte $NO = \frac{1}{2}r$, beschreibe mit NO den Bogen QN , so ist MQ oder MP , wenn man mit MQ den Bogen PR beschreibt, die verlangte Seite x .

Es ist klar, daß durch diese Construction der Radius $MN = r$ nach dem äußern und mittleren Verhältnisse getheilt ist [§. 27.], und daß sein größerer Abschnitt $MR = MQ = MP = x$ die Seite des regulären Zehneckes im Kreise ist.

§. 32.

Aufgabe. Die Seite des regulären Zehneckes um einen Kreis zu finden, dessen Radius r ist.

Auflösung. Nach §. 28. [geom. Aufg.] ist aus der Seite a eines regulären n Eckes im Kreise die Seite des regulären n Eckes um den Kreis oder

$$b = \frac{2ar}{\sqrt{[4r^2 - a^2]}}, \text{ oder } b^2 = \frac{4a^2 r^2}{4r^2 - a^2}.$$

Da für das reguläre Zehneck $a = \frac{r}{2} [\sqrt{5} - 1]$, folglich

$$a^2 = \frac{r^2}{4} [5 - 2\sqrt{5} + 1] = \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}], \text{ dann}$$

$$4a^2 r^2 = 2r^4 [3 - \sqrt{5}]; \text{ ferner}$$

$$4r^2 - a^2 = 4r^2 - \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}] = 4r^2 - \frac{3}{2} r^2 + \frac{r^2}{2} \sqrt{5} \\ = \frac{r^2}{2} [5 + \sqrt{5}] \text{ ist, so muß}$$

$$b^2 = \frac{4a^2 r^2}{4r^2 - a^2} = \frac{2r^4 [3 - \sqrt{5}]}{\frac{r^2}{2} [5 + \sqrt{5}]} = \frac{4r^2 [3 - \sqrt{5}] [5 - \sqrt{5}]}{25 - 5}$$

$$= \frac{1}{5} r^2 [20 - 8\sqrt{5}] = \frac{4}{5} r^2 [5 - 2\sqrt{5}], \text{ also}$$

$$b = 2r \sqrt{[1 - \frac{2}{5} \sqrt{5}]} \text{ seyn.}$$

Die Construction der Seite des regulären Zehneckes um den Kreis kann am Einfachsten durch die Seite des regulären Zehneckes im Kreise auf die Art geschehen, wie überhaupt in der Auflösung des §. 28. gezeigt wurde.

§. 33.

Aufgabe. Die Seite des regulären Fünfeckes im Kreise zu suchen und zu construiren.

Auflösung. Es ist bekannt, daß die Seite des regulären Zehneckes im Kreise oder $b = \frac{r}{2} [\sqrt{5} - 1]$ ist [§. 31. geom. Aufg.]. Ferner kann man durch

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{[4r^2 - b^2]} \quad [\S. 86. \text{ Zus. II.}]$$

aus der Seite des regulären $2n$ Eckes die des regulären n Eckes in demselben Kreise oder a finden. Da in dieser Aufgabe $b = \frac{r}{2} [\sqrt{5} - 1]$ die Seite des regulären Zehneckes ist, so erhält man durch Substitution des Werthes von b in obige Formel die Seite des regulären Fünfeckes.

Es ist nämlich, da $a = \frac{b}{r} \sqrt{[4r^2 - b^2]}$ ist, auch

$$a^2 r^2 = b^2 [4r^2 - b^2].$$

$$\text{Nun ist } b^2 = \frac{r^2}{4} [\sqrt{5} - 1]^2 = \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}], \text{ ferner}$$

$$4r^2 - b^2 = 4r^2 - \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}] = \frac{r^2}{2} [5 + \sqrt{5}].$$

$$\text{Daher } a^2 r^2 = \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}] \frac{r^2}{2} [5 + \sqrt{5}]$$

$$a^2 = \frac{r^2}{4} [10 - 2\sqrt{5}] = \frac{r^2}{2} [5 - \sqrt{5}], \text{ folg-}$$

lich

$$a = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Construction. (Fig. 166.) Man errichte $CB = r$ senkrecht auf der Mitte des Diameters AF , halbire BF in D , und beschreibe, mit der von C nach D gezogenen geraden Linie, den Kreisbogen CE , so ist EB die Seite des regulären Zehneckes und CE die des regulären Fünfeckes im Kreise um B .

Beweis. Da $BC = r$, $BD = \frac{1}{2}r$ und $CD = \frac{r}{2}\sqrt{5}$, so ist $EB = ED - BD = CD - BD = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}[\sqrt{5} - 1]$ die Seite des regulären Zehneckes [§. 31].

$$\begin{aligned}\text{Ferner ist } CE^2 &= BC^2 + EB^2 \\ &= r^2 + \frac{r^2}{4} [5 - 2\sqrt{5} + 1] \\ &= r^2 + \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}] \\ &= \frac{5}{2}r^2 - \frac{r^2}{2}\sqrt{5} \\ &= r^2 \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right], \text{ folglich}\end{aligned}$$

$CE = r \sqrt{\left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right]}$ die Seite des regulären Fünfeckes.

§. 34.

Aufgabe. Um einen Kreis, dessen Halbmesser r ist, werde ein zweyter concentrischer beschrieben, so, daß der Flächeninhalt des Ringes zwischen beyden Kreisen $= m$ werde; es ist der Radius des größern Kreises zu berechnen.

Auflösung. Ist x der Radius des zu suchenden Kreises, so ist $x^2\pi$ seine Fläche. Der Ring, dessen Inhalt $= m$ werden soll, gleicht dem Unterschiede zwischen dem größeren und kleineren Kreise, daher

$$x^2\pi - r^2\pi = m, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{m}{\pi} + r^2 \right]} \text{ ist.}$$

Beyspiel. Ist $r = 39' 8''$, $m = 385 \square'$, so wird $x = 41' 3''$.

§. 35.

Aufgabe. Ein Dreyeck, dessen Grundlinie $= b$, und dessen Höhe $= h$ gegeben ist, soll in ein Parallelogramm verwandelt werden, dessen Grundlinie m ist; man suche die dazugehörige Höhe x .

Auflösung. Die Dreyecksfläche ist $= \frac{1}{2}bh$, die Fläche des Parallelogramms mx , folglich ist

$$mx = \frac{1}{2}bh \text{ und}$$

$$x = \frac{bh}{2m} \text{ die gesuchte Höhe. Will man die}$$

Höhe construiren, so kann dieß nach §. 5. geom. Aufgaben geschehen, denn es ist aus $x = \frac{bh}{2m}$ auch

$$2m : b = h : x \text{ etc.}$$

§. 36.

Aufgabe. Es werde ein rechtwinkliges Dreyeck construirt, dessen eine Kathete die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Hypotenuse und der anderen Kathete ist.

Auflösung. Gesetzt die erstere Kathete sey x , die Hypotenuse h , dann ist die andere Kathete $\sqrt{h^2 - x^2}$. Nach den Bedingungen der Aufgabe wird

$$h : \sqrt{h^2 - x^2} : x, \text{ daher}$$

$$hx = h^2 - x^2$$

$$x^2 + hx = h^2$$

$$x = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{5h^2}{4}} = -\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\sqrt{5}$$

$$= \frac{h}{2}[\sqrt{5} - 1], \text{ dessen Construction sich}$$

aus §. 12. geom. Aufg. ergibt unter der Voraussetzung, daß h eine bekannte Länge ist. Hat man x , so errichte man auf ihr in einem Endpunkte eine Senkrechte und schneide diese mit h aus dem andern Endpunkte ab, so erhält man das verlangte Dreyeck.

§. 37.

Aufgabe. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreyeckes ist m , der Perimeter desselben p ; wie groß ist jede Seite dieses Dreyeckes.

Auflösung. Da in dieser Aufgabe drey unbekannte Größen vorkommen, so ist es vor Allem nöthig, drey Gleichungen aus den Bedingungen der Aufgabe zu entwickeln. Es ist nämlich für den Inhalt dieses rechtwinkligen Dreyeckes, wenn x und y die beyden Katheten und z die Hypotenuse ausdrückt,

$$I. \frac{xy}{2} = m.$$

Da der Perimeter d. i. die Summe der drey Seiten des Dreyeckes p ist, so muß

$$II. \quad x + y + z = p \text{ seyn.}$$

Nach §. 80. Zus. III. ist ferner

$$III. \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Aus II. ist $x + y = p - z$, folglich

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2 - 2pz + z^2$$

$$-x^2 - y^2 = -z^2 \quad [III.]$$

$$2xy = p^2 - 2pz, \text{ und, da } 2xy = 4m \text{ [I.] ist,}$$

$$4m = p^2 - 2pz, \text{ folglich } z = \frac{p^2 - 4m}{2p}.$$

Aus I. ist auch $x = \frac{2m}{y}$, folglich nach II. oder

$$x + y + z = p$$

$$\frac{2m}{y} + y + \frac{p^2 - 4m}{2p} = p$$

$$4pm + 2py^2 + p^2y - 4my = 2p^2y$$

$$2py^2 - p^2y - 4my = -4pm$$

$$y^2 - \frac{p^2 + 4m}{2p} y = -2m, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{p^2 + 4m}{4p} \pm \sqrt{\left(\frac{p^4 + 8p^2m + 16m^2}{16p^2} - 2m \right)}$$

$$= \frac{p^2 + 4m}{4p} \pm \sqrt{\left(\frac{p^4 - 24p^2m + 16m^2}{16p^2} \right)}$$

$$= \frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p}.$$

Nun ist x zu finden. Es ist nämlich aus II.

$$x = p - [y + z]$$

$$= p - \left(\frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p} + \frac{p^2 - 4m}{2p} \right)$$

$$= \frac{4p^2 - p^2 - 4m \mp \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]} - 2p^2 + 8m}{4p}$$

$$= \frac{p^2 + 4m \mp \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p}.$$

Es sind demnach

$$x = \frac{p^2 + 4m \mp \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p}$$

$$y = \frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p}$$

$$z = \frac{p^2 - 4m}{2p} = \frac{1}{2}p - \frac{2m}{p}$$

die drey Seiten des Dreyeckes, welche den, in den drey Gleichungen I, II und III ausgedrückten, Bedingungen entsprechen. Als Probe und zugleich zur Uebung im Calcul möge der Anfänger die Substitution obiger Werthe von x , y und z in diese Gleichungen wirklich vornehmen, wo dann das halbe Product aus den Werthen von x und y die Gröfse m , die Summe der Werthe von x , y und z aber p , so wie die Summe der Quadrate der Werthe von x und y das Quadrat des Werthes von z geben mufs.

§. 38.

Aufgabe. (Fig. 167. u. 168.) In einem Dreyecke ABC sind die aus den Spitzen desselben auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendicel gegeben; man soll daraus die Seiten und den Inhalt des Dreyeckes finden.

Auflösung. Man setze (Fig. 167 und 168.) das Perpendicel $BD = a$, $CE = b$ und $AF = c$, die Seite $AB = x$, $AC = y$ und $BC = z$. Nach §. 26. ist der Inhalt des Dreyeckes ABC , oder

$$\Delta ABC = \frac{1}{4} \sqrt{[(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(z+y-x)]}.$$

Da $\angle ADB = \angle AEC = R$ und der Winkel A gemeinschaftlich, mithin $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ist, so mufs

$$BD : AB = CE : AC, \text{ oder}$$

$$a : x = b : y, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{bx}{a} \text{ ist.}$$

Auch ist $\triangle CBE \sim \triangle ABF$, folglich

$$AF : AB = CE : BC, \text{ oder}$$

$$c : x = b : z, \text{ woraus}$$

$$z = \frac{bx}{c} \text{ ist.}$$

Bringt man diese Werthe für y und z in obige Gleichung für das Dreyeck ABC , so ist ΔABC

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\left(x + \frac{bx}{a} + \frac{bx}{c}\right) \left(x + \frac{bx}{a} - \frac{bx}{c}\right) \left(x + \frac{bx}{c} - \frac{bx}{a}\right) \left(\frac{bx}{c} + \frac{bx}{a} - x\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\left(x \frac{ac+bc+ab}{ac} \cdot x \frac{ac+bc-ab}{ac} \cdot x \frac{ac+ab-bc}{ac} \cdot x \frac{ab+bc-ac}{ac}\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{x^4}{a^4 c^4} (ac+bc+ab)(ac+bc-ab)(ac+ab-bc)(ab+bc-ac)\right)}$$

$$= \frac{x^2}{4a^2 c^2} \sqrt{(ac+bc+ab)(ac+bc-ab)(ac+ab-bc)(ab+bc-ac)}$$

Man benenne das, was nach dem Wurzelzeichen steht, durch M , so wird

$$\triangle ABC = \frac{x^2}{4a^2c^2} \sqrt{M}. \text{ Auch ist}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} bx, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{2} bx = \frac{x^2 \sqrt{M}}{4a^2c^2}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{2a^2bc^2}{\sqrt{M}} = \frac{2a^2bc^2\sqrt{M}}{M}.$$

Man kann nun leicht die beyden anderen Seiten des Dreyeckes finden, wenn man den gefundenen Werth von x in obige Gleichungen $y = \frac{bx}{a}$ und $z = \frac{bx}{c}$ bringt. Es ist nämlich

$$y = \frac{2ab^2c^2}{\sqrt{M}} = \frac{2ab^2c^2\sqrt{M}}{M}, \text{ und}$$

$$z = \frac{2a^2b^2c}{\sqrt{M}} = \frac{2a^2b^2c\sqrt{M}}{M}.$$

Endlich ist der Inhalt des Dreyeckes, oder

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} bx = \frac{a^2b^2c^2}{\sqrt{M}} = \frac{a^2b^2c^2\sqrt{M}}{M}.$$

§. 39.

Aufgabe. (Fig. 169.) Ein Dreyeck ABC durch eine gerade Linie, die durch einen gegebenen Punct D der Seite AB geht, in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Gesetzt ED sey die Theilungslinie, dann $AB = a$, $AD = c$, $AC = b$ und $AE = x$. Man fälle EH und CI auf AB senkrecht, so ist $\triangle AEH \sim \triangle ACI$ [§. 76.], mithin

$$AE : AC = EH : CI \text{ und auch}$$

$$AE \cdot AD : AC \cdot AB = EH \cdot AD : CI \cdot AB, \text{ oder}$$

$$x \cdot c : b \cdot a = \triangle AED : \triangle ABC \text{ [§. 70.]}$$

$$xc : ab = 1 : 2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{ab}{2c}.$$

Es ist also der Punct E von A in einer solchen Entfernung zu nehmen, als $AE = x = \frac{ab}{2c}$ ausdrückt.

Construction. Um $x = \frac{ab}{2c}$ durch Construction zu finden, folgere man daraus

$$c : \frac{1}{2}a = b : x, \text{ d. h.}$$

die Linie x ist die vierte geometrische Proportionallinie zwischen c , $\frac{1}{2}a$ und b .

Man theile daher $AB = a$ in zwey gleiche Theile, ziehe CD und durch F die Linie $FE \parallel CD$, so ist

$$AD : AF = AC : AE, \text{ oder}$$

$$c : \frac{1}{2}a = b : AE, \text{ folglich } AE = x.$$

I. Zusatz. Auf ähnliche Art verfährt man um ein Dreyeck von einem Punkte aus so zu theilen, daß sich das ganze Dreyeck zum Theile verhält, wie $m : n$.

Fände man $x > AC$, so kann die Theilungslinie die Seite AC nicht treffen, wohl aber die Seite CB , und die Theilungslinie wird irgend eine andere Linie DK . Also ist gemäß der vorigen Auflösung, wenn $BK = z$ und $BC = d$ ist,

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle BDK &= AB \cdot CB : BD \cdot BK \\ &= a \cdot d : [a - c] \cdot z. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung soll

$$\triangle ABC : \triangle BDK = m : n, \text{ folglich}$$

$$\triangle ABC : \triangle BDK = m : m - n, \text{ also auch}$$

$$m : m - n = ad : (a - c) z, \text{ woraus}$$

$$[a - c] z = \frac{(m - n) ad}{m} \text{ und}$$

$$z = \frac{(m - n) ad}{(a - c) m} \text{ ist.}$$

Diese Gröfse trage man von B nach K , und ziehe DK , so wird diese Linie das Dreyeck im Verhältnisse $m : n$ theilen.

II. Zusatz. Aus der Auflösung obiger Aufgabe, nämlich aus der Proportion, $xc : ba = \triangle AED : \triangle ABC$ ergibt sich, daß Dreyecke, die einen Winkel gleich haben, sich ihrem Flächeninhalte nach zu einander verhalten, wie die Producte jener zwey Seiten, welche diesen gleichen Winkel einschließen.

§. 40.

Aufgabe. (Fig. 170.) Im Vierecke $ABCD$ ist der Winkel $A = 90^\circ$, man soll aus seinen vier Seiten $AB = a$,

$BC = b$, $CD = c$ und $AD = d$ seinen Flächeninhalt finden.

Auflösung. Man setze den zu suchenden Flächeninhalt des Viereckes $= x$, und die Diagonale $BD = m$.

Nun ist $m = \sqrt{a^2 + d^2}$,

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} a \cdot d$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c+m)(b+c-m)(b+m-c)(c+m-b)]}$$

mithin $\triangle ABD + \triangle BCD = x =$

$$= \frac{1}{2} a \cdot d + \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c+m)(b+c-m)(d+m-c)(c+m-b)]}.$$

§. 41.

Aufgabe. (Fig. 171.) Ein Dreyeck ABC durch eine, zu einer Seite des Dreyeckes parallele, Linie DE nach einem gegebenen Verhältnisse, $m : n$, zu theilen.

Auflösung. Es ist klar, daß die Auflösung dieser Aufgabe darin besteht, den Punct D , oder $DB = x$, zu bestimmen.

Da nun $DE \parallel AC$ seyn muß, so ist $\triangle BDE \sim \triangle ABC$, folglich, wenn $AB = c$ ist,

$$\triangle ABC : \triangle BDE = AB^2 : BD^2$$

$$= c^2 : x^2$$

$$= m : n. \text{ Mithin}$$

$$m : n = c^2 : x^2, \text{ woraus}$$

$$x^2 = \frac{nc^2}{m} \text{ und } x = c\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Diese GröÙe trage man von B nach D auf, und ziehe durch D eine Parallele mit AC , so ist die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

§. 42.

Aufgabe. (Fig. 172.) Die drey Seiten eines Dreyeckes ABC sind gegeben; man theile AB in zwey gleiche Theile und ziehe nach dem Theilungspuncte D von der Spitze C die Linie CD . Man soll die GröÙe dieser Linie finden.

Auflösung. Gesetzt $AC = b$, $BC = a$, $AD = c$ und $AB = 2c$. Man ziehe die Senkrechte CE , und setze $EB = x$, $DE = c - x$, und $DC = z$.

Betrachtet man die beyden rechtwinkligen Dreyecke CDE und CBE , so ist:

$$CE^2 = CD^2 - DE^2 = z^2 - [c - x]^2 = z^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$CE^2 = CB^2 - EB^2 = a^2 - x^2,$$

folglich $z^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2$, und

$$2cx = a^2 + c^2 - z^2$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - z^2}{2c}.$$

Nun ist auch aus den beyden rechtwinkligen Drey-ecken *ACE* und *BCE*

$$CE^2 = CB^2 - EB^2 = a^2 - x^2$$

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 = b^2 - [2c - x]^2 = b^2 - 4c^2 + 4cx - x^2.$$

Mithin auch $b^2 - 4c^2 + 4cx - x^2 = a^2 - x^2$, woraus

$$4cx = a^2 + 4c^2 - b^2, \text{ also}$$

$$x = \frac{a^2 + 4c^2 - b^2}{4c} \text{ ist.}$$

Beide Werthe von x zusammengestellt, geben:

$$\frac{a^2 + 4c^2 - b^2}{4c} = \frac{a^2 + c^2 - z^2}{2c}$$

$$a^2 + 4c^2 - b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2z^2$$

$$2z^2 = a^2 + b^2 - 2c^2$$

$$z = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{2} = DC.$$

§. 43.

Aufgabe. (Fig. 158.) Im rechtwinkligen Dreyecke *ABC* ist die Hypotenuse $AC = b$ und die Summe der Katheten $AB + BC = a$ gegeben; man soll die beyden Katheten selbst finden.

Auflösung. Man setze $AB = x$ und $BC = y$, so ist der Aufgabe gemäß:

$$\text{I. } x + y = a \text{ und}$$

$$\text{II. } x^2 + y^2 = b^2 \quad [\S. 80. \text{Zus. III.}]$$

Aus I. wird $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$, davon II. subtrahirt,

$$\underline{x^2 + y^2 = b^2}, \text{ gibt}$$

$$2xy = a^2 - b^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2y} \text{ ist.}$$

Substituirt man diesen Werth von x in I., so ist:

$$\frac{a^2 - b^2}{2y} + y = a$$

$$a^2 - b^2 + 2y^2 = 2ay$$

$$2y^2 - 2ay = b^2 - a^2$$

$$y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 - a^2}{4}$$

$$y = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2} = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}].$$

Um nun auch x zu bestimmen, nehme man I. und substituirt für y den so eben gefundenen Werth, nämlich:

$$x = a - y$$

$$= a - \left[\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2} \right]$$

$$= \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2} = \frac{1}{2} [a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}].$$

Beispiel. Ist $b = 97'$ und $a = 137'$, so erhält man durch gehörige Substitution $x = 72'$ und $y = 65'$.

§. 44.

Aufgabe. (Fig. 172.) Der Flächeninhalt a eines schiefwinkligen Dreyeckes ABC , seine Höhe $CE = h$ und das durch diese abgeschnittene Stück $BE = d$ sind gegeben; man soll jede Seite finden.

Auflösung. Gesetzt $AE = x$, also $AB = x + d$, $AC = y$ und $BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{d^2 + h^2}$.

Ferner ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot h$, oder

$a = \frac{1}{2} h \cdot AB$, folglich die zweite Seite

$$\frac{2a}{h} = AB.$$

Da nun auch $AB = x + d$, folglich $x + d = \frac{2a}{h}$ u.

$x = \frac{2a}{h} - d = \frac{2a - hd}{h}$ ist, so muß die dritte Seite, in-

dem $AC^2 = AE^2 + CE^2$ ist, auch

$$y = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$y = \sqrt{\left[\left(\frac{2a - hd}{h}\right)^2 + h^2\right]}$$

$$y = \sqrt{\frac{4a^2 - 4ahd + h^2 d^2 + h^4}{h^2}}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{4a^2 - 4ahd + h^2 d^2 + h^4}}{h} \text{ seyn.}$$

§. 45.

Aufgabe. (Fig. 94.) In einem rechtwinkligen Drey-ecke ABC ist die Hypotenuse $BC = a$, und das Verhält-

nifs der beyden Katheten $AB : AC = m : n$ gegeben; man soll beyde Katheten finden.

Auflösung. Es sey $AB = x$ und $AC = y$.

Nach §. 80. Zus. III. ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$, oder

$$a^2 = x^2 + y^2 \text{ und}$$

$$a^2 - y^2 = x^2.$$

Nun ist der Aufgabe gemäß:

$$x : y = m : n, \text{ also } x = \frac{m}{n} y \text{ und } x^2 = \frac{m^2}{n^2} y^2,$$

welcher Werth, in die vorige Gleichung substituirt, die Gleichung

$$\frac{m^2}{n^2} y^2 = a^2 - y^2 \text{ gibt, woraus}$$

$$m^2 y^2 + n^2 y^2 = a^2 n^2$$

$$y^2 = \frac{a^2 n^2}{m^2 + n^2}$$

$$y = \frac{an}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{an\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}.$$

Nun ist nach Obigem $x = \frac{m}{n} y$, mithin auch

$$x = \frac{m}{n} \cdot \frac{an\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2} = \frac{am\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}.$$

Beispiel. Für $a = 300'$ und $m : n = 4 : 3$ ergibt sich durch gehörige Substitution $y = 180'$ und $x = 240'$.

§. 46.

Aufgabe. (Fig. 94.) Im rechtwinkligen Dreyecke ABC ist die Hypotenuse $BC = a$ und die Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse, nämlich $AD = p$ gegeben; man soll die dadurch abgeschnittenen Stücke der Hypotenuse und beyde Katheten finden.

Auflösung. 1) Gesetzt $BD = x$ und $DC = y$, folglich, indem $x + y = a$ ist, $y = a - x$.

2) Es ist $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ [§. 80. 1.], mithin

$$BD : AD : DC \text{ [§. 80. 2.], oder}$$

$$x : p : y, \text{ woraus}$$

$$p^2 = xy = x[a - x] \text{ [1.]}$$

$$p^2 = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -p^2$$

$$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - p^2$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4p^2}$$

$$= \frac{1}{2}[a \pm \sqrt{(a+2p)(a-2p)}]$$

3) Da aus 1) $y = a - x$ ist, so muß auch

$$y = a - [\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2}]$$

$$= \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2} = \frac{1}{2}[a \mp \sqrt{(a+2p)(a-2p)}].$$

4) Nach §. 80. Zus. I. ist:

$$BD : AB : BC, \text{ oder}$$

$$x : AB : a, \text{ also}$$

$$AB^2 = ax = \frac{a}{2}[a \pm \sqrt{(a+2p)(a-2p)}] \text{ und}$$

$$AB = \sqrt{[\frac{a}{2}[a \pm \sqrt{(a+2p)(a-2p)}]]}.$$

Ebenso ist für die andere Kathete:

$$DC : AC : BC, \text{ oder}$$

$$y : AC : a, \text{ woraus}$$

$$AC^2 = ay = \frac{a}{2}[a \mp \sqrt{(a+2p)(a-2p)}] \text{ und}$$

$$AC = \sqrt{[\frac{a}{2}[a \mp \sqrt{(a+2p)(a-2p)}]]}.$$

Beyspiel. Für $a = 75'$ und $p = 36'$ wird $x = 27'$,
 $y = 42'$, dann $AB = 60'$ und $AC = 45'$.

§. 47.

Aufgabe. (Fig. 158.) In einem rechtwinkligen Drey-
 ecke ABC ist die Hypotenuse $AC = b$, und der Unter-
 schied zwischen beyden Katheten $BC - AB = d$ gegeben;
 man soll die beyden Katheten BC und AB selbst finden.

Auflösung. Man setze $BC = x$ und $AB = y$. Be-
 schreibt man mit AB aus B den Kreisbogen AG , so ist
 $GC = BC - BG = BC - AB = x - y = d$, also
 auch $x = d + y$.

Es ist ferner $x^2 + y^2 = b^2$, also $x^2 = b^2 - y^2$; mit-
 hin die neue Gleichung $[d + y]^2 = b^2 - y^2$, oder

$$d^2 + 2dy + y^2 = b^2 - y^2, \text{ woraus}$$

$$2y^2 + 2dy = b^2 - d^2$$

$$y^2 + dy + (\frac{1}{2}d)^2 = \frac{b^2 - d^2}{2} + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}d^2$$

$$y = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{[\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}d^2]} = -\frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2}.$$

Da nun aus Obigem $x = d + y$ ist, so muß auch

$$x = d - \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2}$$

$$= \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2} = \frac{1}{2}[d \pm \sqrt{2b^2 - d^2}].$$

Beyspiel. Ist $b = 97'$ und $d = 7'$, so wird $BC = x = 65'$ und $AB = y = 72'$.

§. 48.

Aufgabe. (Fig. 173.) Im Durchmesser AD eines Kreises ist ein Punct P gegeben, wodurch die senkrechte Linie PM gezogen ist; man soll aus A durch MP eine Sehne AB so ziehen, daß EB dem Radius des Kreises gleich oder $EB = AC = r$ werde. Wie groß muß AB werden?

Auflösung. Man setze, da der Punct P gegeben ist, $AP = a$, dann $AC = EB = r$, $AD = 2r$ und $AB = x$, also $AE = AB - EB = x - r$.

Man ziehe BD und dann BG senkrecht auf AD , so ist: $\triangle APE \sim \triangle ABG$, also

$$AE : AP = AB : AG, \text{ oder}$$

$$x - r : a = x : AG, \text{ woraus}$$

$$AG = \frac{ax}{x - r} \text{ ist.}$$

Ferner ist auch $\triangle ABD \sim \triangle ABG$ [§. 80.], mithin

$$AD : AB = AB : AG, \text{ oder}$$

$$2r : x = x : AG, \text{ woraus wieder}$$

$$AG = \frac{x^2}{2r} \text{ ist.}$$

Stellt man beyde Werthe von AG zusammen, so ergibt sich:

$$\frac{x^2}{2r} = \frac{ax}{x - r}, \text{ oder}$$

$$x(x - r) = 2ar, \text{ folglich}$$

$$x^2 - rx + \left(\frac{1}{2}r\right)^2 = 2ar + \frac{1}{4}r^2$$

$$x = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{2ar + \frac{1}{4}r^2} = \frac{1}{2}[r \pm \sqrt{r(8a + r)}] = AB.$$

§. 49.

Aufgabe. (Fig. 174.) Im Dreyecke ABC sind die Grundlinie $AB = b$ und die Höhe $CD = a$ gegeben; man soll in diesem Dreyecke ein Rechteck EG so zeichnen, daß dessen Flächeninhalt sich zu dem des Dreyeckes verhalte, wie $m : n$.

Auflösung. 1) Gesetzt $AB = b$, $CD = a$, so ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab$; $EH = ID = x$, $CI = a - x$, $EF = y$.

Es ist $\triangle ABC \sim \triangle EFC$, folglich

$$AB : CD = EF : CI, \text{ oder}$$

$$b : a = y : a - x, \text{ woraus}$$

$$ay = (a - x) b \text{ und } y = \frac{(a - x)b}{a}.$$

Da ferner nach den Bedingungen der Aufgabe

$$EG : \triangle ABC = m : n \text{ oder}$$

$$xy : \frac{1}{2} ab = m : n \text{ seyn soll, so ist auch}$$

$$nxy = \frac{1}{2} abm \text{ und}$$

$$y = \frac{abm}{2nx}.$$

Stellt man beyde Werthe von y zusammen, so wird

$$\frac{(a - x)b}{a} = \frac{abm}{2nx}, \text{ mithin}$$

$$2anbx - 2nbx^2 = a^2bm$$

$$x^2 - ax = -\frac{a^2m}{2n}$$

$$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2m}{2n}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2m}{2n}\right]} = \frac{1}{2}a \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right] = ID.$$

Durch ID ist der Punct I in CD gefunden, durch welchen man $EF \parallel AB$ ziehen muß.

2) Will man eine besondere Gleichung für die zweyte Seite EF des gesuchten Rechteckes angeben, so betrachte man $CI = a - x$ [1.], folglich, da x bekannt ist,

$$CI = a - x = a - \left[\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right]$$

$$= \frac{a}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right]. \text{ Ferner ist}$$

$$\text{aus 1) } y = \frac{(a - x)b}{a}, \text{ also auch}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right]$$

$$= \frac{b}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right] = EF.$$

§. 50.

Aufgabe. (Fig. 175.) Es sind zwey concentrische Kreise gegeben. Man soll durch dieselben eine gerade Linie so ziehen, daß sich die beyden Sehnen AB und ED verhalten, wie $m : n$.

Auflösung. Man fälle FC senkrecht auf AB .

Durch den Abstand FC der Sehnen vom Mittelpunkte sind diese selbst bestimmt.

Es ist $AF = \frac{1}{2} AB$ und $EF = \frac{1}{2} ED$. Man setze

$AC = R$, $EC = r$, $FC = x$, so ist:

$$AF^2 = AC^2 - FC^2 \\ = R^2 - x^2; \text{ eben so}$$

$$EF^2 = EC^2 - FC^2 \\ = r^2 - x^2.$$

Da den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$AB : ED = m : n$ seyn soll, so ist auch

$\frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} ED = m : n$, oder

$AF : EF = m : n$ und auch

$AF^2 : EF^2 = m^2 : n^2$, oder

$R^2 - x^2 : r^2 - x^2 = m^2 : n^2$, woraus

$$R^2 n^2 - x^2 n^2 = r^2 m^2 - x^2 m^2$$

$$x^2 m^2 - x^2 n^2 = r^2 m^2 - R^2 n^2$$

$$x^2 = \frac{r^2 m^2 - R^2 n^2}{m^2 - n^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{(rm + Rn)(rm - Rn)}{(m + n)(m - n)}} = FC.$$

§. 51.

Aufgabe. (Fig. 176.) Das Trapez $ABCD$ soll durch eine gerade Linie parallel zur Grundlinie in zwey gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung. Man fälle $AH = h$ senkrecht auf CD , und ziehe EF , welche die Theilungslinie vorstellen soll, parallel zu CD , und setze $AB = a$, $CD = A$, $EF = y$ und $AG = x$.

Auch ziehe man $AI \parallel BD$, so wird $CI = CD - ID = A - a$, und $EK = EF - KF = y - a$. Ferner ist $AD = \frac{1}{2} h [A + a]$ und $AF = \frac{1}{2} x [y + a]$; mithin der Aufgabe gemäß $AF = \frac{1}{2} AD$, oder

$$x [y + a] = \frac{1}{2} h [A + a].$$

Da $EK \parallel CI$ ist, so wird auch $EK : CI = AG : AH$, oder $y - a : A - a = x : h$, woraus $x = h \frac{y - a}{A - a}$.

Diesen Werth von x in die vorige Gleichung substituiert, gibt:

$$h \frac{(y-a)(y+a)}{A-a} = \frac{1}{2} h [A+a]$$

$$y^2 - a^2 = \frac{1}{2} [A^2 - a^2]$$

$$y^2 = \frac{A^2 - a^2}{2} + a^2 = \frac{A^2 + a^2}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{A^2 + a^2}{2}} = EF.$$

Will man auch x bestimmen, so wird aus

$$x = h \frac{y-a}{A-a}$$

$$= \frac{h}{A-a} \left[\sqrt{\frac{A^2 + a^2}{2}} - a \right] = AG, \text{ und } G$$

ist der Punct, durch welchen $FF \parallel CD$ gezogen werden muß.

§. 52.

Aufgabe. (Fig. 176.) Man soll von einem Trapeze AD durch eine zur Grundlinie parallele Linie EF ein Stück von gegebenem Inhalte abschneiden.

Auflösung. Man fälle AH senkrecht auf CD , ziehe $AI \parallel BD$, und setze $AB = a$, $CD = A$, $AH = h$, dann $EF = y$ und $AG = x$, so wie den Inhalt des abzuschneidenden Stückes $= m$. Man hat also den Punct G zu bestimmen, durch welchen die Theilungslinie zu CD parallel zu ziehen ist.

Es ist nach obiger Construction $EK = EF - AB = y - a$, $CI = CD - AB = A - a$; und da $EK \parallel CI$, auch

$$EK : CI = AG : AH, \text{ oder}$$

$$y - a : A - a = x : h, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{y-a}{A-a} \cdot h.$$

Ferner soll $AF = (a + y) \frac{x}{2} = m$ seyn, woraus eben-

falls $x = \frac{2m}{a+y}$ ist.

Stellt man beyde Werthe von x in eine neue Gleichung zusammen, so wird:

$$\frac{y-a}{A-a} \cdot h = \frac{2m}{y+a}$$

$$(y+a)(y-a) \cdot h = 2m(A-a)$$

$$y^2 - a^2 = \frac{2m}{h} (A - a)$$

$$y = \sqrt{\left[\frac{2m}{h} (A - a) + a^2\right]} = EF.$$

$$\text{Ferner ist } x = \frac{(y - a) h}{A - a} = \frac{h}{A - a} [y - a]$$

$$= \frac{h}{A - a} \left[\sqrt{\left[\frac{2m}{h} (A - a) + a^2\right]} - a \right] = AG.$$

§. 53.

Aufgabe. (Fig. 177.) Man soll das Trapez BD durch eine gerade Linie, aus einem gegebenen Punkte T in einer der parallelen Seiten, nach einem gegebenen Verhältnisse theilen.

Auflösung. Gesetzt TE sey die Theilungslinie, so, daß das dadurch abgeschnittene Stück $ABET$ zum ganzen Trapeze sich verhält, wie $n : m$. Nun sey $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$, $AT = f$ und $BE = x$, welches zu suchen ist, indem durch den Punct E die Richtung der Theilungslinie ET bestimmt ist.

Bedeutet h die Höhe des Trapezes BD , so ist

$$ABCD = [AD + BC] \frac{h}{2} = [a + b] \frac{h}{2}$$

$$ABET = [AT + BE] \frac{h}{2} = [f + x] \frac{h}{2}.$$

$$\text{Mithin } ABCD : ABET = [a + b] \frac{h}{2} : [f + x] \frac{h}{2}$$

$$= a + b : f + x, \text{ und, da auch}$$

$$ABCD : ABET = m : n \text{ [Aufg.] ist, so}$$

mufs auch $a + b : f + x = m : n$, folglich

$$[f + x] m = [a + b] n$$

$$f + x = \frac{n}{m} [a + b] \quad \text{und}$$

$$x = \frac{n}{m} [a + b] - f = BE \text{ seyn.}$$

Diese Länge x oder BE trage man von B gegen C hin, und ziehe ET , so ist die verlangte Theilung geschehen.

Für den Fall, daß $x = 0$ oder $= b$ wird, fällt die Theilungslinie mit BT oder CT zusammen. Würde aber x negativ, oder gröfser als b , so bedeutet diefs, daß die Theilungslinie auf BA oder CD fällt.

Ist x negativ, so kömmt es darauf an, $AF = y$ zu finden. Man ziehe BT und FT , so ist :

$ABCD : \triangle ABT = [a + b] \frac{h}{2} : f \cdot \frac{h}{2}$, oder
 $ABCD : \triangle ABT = a + b : f$, aber es ist auch
 $\triangle ABT : \triangle AFT = c : y$ [§. 68.], mithin

$\triangle ABT . ABCD : \triangle ABT . \triangle AFT = (a + b)c : fy$, und
 $ABCD : \triangle AFT = (a + b)c : fy$, da aber auch
 $ABCD : \triangle AFT = m : n$ [Aufg.], so muß

$(a + b)c : fy = m : n$ und daher

$fym = (a + b)cn$, also

$$y = \frac{(a + b)cn}{fm} = AF \text{ seyn.}$$

Ist x gröfser als b , so ist für $DG = z$, wenn man FG zieht,

$ABCD : \triangle CDT = [a + b] \frac{h}{2} : [a - f] \frac{h}{2}$, oder

$ABCD : \triangle CDT = a + b : a - f$. Auch ist

$\triangle CDT : \triangle GTD = d : z$ [§. 68.], folglich auch

$ABCD : \triangle GTD = (a + b)d : (a - f)z$, und da

$ABCD : ABCGT = m : n$, und

$ABCD : ABCD - ABCGT = m : m - n$, oder

$ABCD : \triangle GTD = m : m - n$ ist, so muß auch

$(a + b)d : (a - f)z = m : m - n$ und daher

$(a - f)zm = (a + b)(m - n)d$, also

$$z = (m - n) \frac{(a + b)d}{(a - f)m} = GD \text{ seyn.}$$

§. 54.

Aufgabe. (Fig. 178.) Jedes Viereck durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Punkte auf einer seiner Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Auflösung. 1) Das gegebene Viereck sey $ABCD$ und E der Theilungspunct, aus welchem EF das Viereck so theilt, daß $ABCD : CDEF = m : n$ ist.

Man verlängere BC und AD bis sie sich in G schneiden. Es sey $AG = a$, $BG = b$, $DG = c$ und $CG = d$, welche Linien sich leicht, im Falle das Viereck selbst bestimmt ist, finden lassen. Da ferner der Punct E gegeben ist, so ist auch $EG = f$ gegeben.

Der Punct F , oder $FG = x$, soll gefunden werden.

2) Es ist $\triangle ABG : \triangle CDG = AG.BG : DG.CG$ [§. 39. Z.II. geom. Aufg.]
 $= a . b : c : d$, also

$$\triangle ABG - \triangle CDG : \triangle CDG = ab - cd : cd, \text{ oder}$$

$$ABCD : \triangle CDG = ab - cd : cd. \text{ Ebenso ist}$$

$$3) \triangle FEG : \triangle CDG = EG \cdot FG : DG \cdot CG [\S. 39. Z. II. \text{ geom. Aufg.}] = f \cdot x : c \cdot d, \text{ also auch}$$

$$\triangle FEG - \triangle CDG : \triangle CDG = fx - cd : cd, \text{ oder}$$

$$CDEF : \triangle CDG = fx - cd : cd. \text{ Da auch}$$

$$ABCD : \triangle CDG = ab - cd : cd [2.] \text{ ist, so}$$

$$\text{mufs auch } \frac{ABCD : CDEF = ab - cd : fx - cd. \text{ Es ist}}$$

$$\text{aber } ABCD : CDEF = m : n [\text{Vorausss.}]$$

$$\text{Mithin } ab - cd : fx - cd = m : n, \text{ woraus}$$

$$fx - cd = \frac{(ab - cd)n}{m} \text{ und}$$

$$x = \frac{(ab - cd)n}{fm} + \frac{cd}{f} = FG.$$

Diese gefundene Linie trage man von G gegen B durch FG auf, und ziehe FE , so ist dadurch das Viereck nach dem verlangten Verhältnisse getheilt.

§. 55.

Aufgabe. (Fig. 179.) Man soll eine gerade Linie AB so in zwey Theile theilen, dass das Rechteck, aus den beyden Theilen construirt, einem gegebenen Quadrate MP gleich wird.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$ und $MP = b^2$. Man nehme an, G sey der Theilungspunct. Nimmt man $AG = x$, also $GB = a - x$, so mufs der Aufgabe gemäfs $AG \cdot GB = b^2$, oder

$$x(a - x) = b^2 \text{ seyn, woraus } x^2 - ax = -b^2 \text{ und}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{(a+2b)(a-2b)}].$$

Construction. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in B die Linie $HB = b$ senkrecht auf AB , ziehe endlich durch H die Linie $HE \perp AB$, wodurch der Halbkreis in F geschnitten wird. Die Senkrechte FG von F auf AB theilt diese in G in die verlangten Theile AG und GB .

Analytischer Beweis. Man ziehe den Radius CF so ist:

$$CG = \sqrt{CF^2 - FG^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}, \text{ folglich}$$

$$AG = AC + CG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}, \text{ und}$$

$$AD = AC - DC = AC - CG$$

$$= \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}, \text{ wenn man auch vom}$$

Durchschnittspuncte E des Bogens und der Parallele auf AB die Senkrechte ED fällt.

Synthetischer Beweis. Es ist $FG = HB = b$ [Constr.] und $AG : FG : GB$ [§. 80. Zus. II.], woraus $AG \cdot GB = FG^2 = b^2$ ist.

§. 56.

Aufgabe. (Fig. 180.) Man soll eine gegebene gerade Linie AB um so viel verlängern, daß das Rechteck, aus der ganzen verlängerten Linie und dem verlängerten Stücke derselben construirt, einem gegebenen Quadrate mit der Seite n gleiche.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $BD = x$, dann ist $AD = a + x$, folglich der Aufgabe gemäß:

$$AD \cdot BD = n^2 \text{ oder}$$

$$(a + x) x = n^2, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + n^2\right]} = BD.$$

Construction. Man halbiere AB in C , und errichte in B auf AB die Senkrechte $BE = n$, ziehe EC und beschreibe mit CE den Kreisbogen ED , der die Verlängerung von AB in D schneidet. Das Stück BD ist dann die gesuchte Verlängerung.

Beweis. Denn es ist:

$$CD = CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + n^2\right]} \text{ und}$$

$$BD = CD - CB = \sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + n^2\right]} - \frac{1}{2}a = x.$$

§. 57.

Aufgabe. (Fig. 181.) Eine gegebene gerade Linie AB soll so in zwey Theile AC und CB getheilt werden, daß das Rechteck, aus dem einen Theile, AC , und einer anderen gegebenen geraden Linie n construirt, dem Quadrate des andern Theiles, CB , gleich sey.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$, $BC = x$, so ist $AC = AB - CB = a - x$ und vermöge der Bedingung der Aufgabe:

$$AC \cdot n = CB^2, \text{ oder}$$

$$(a - x) n = x^2, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{[an + \frac{1}{4}n^2]}.$$

Construction. Man verlängere AB , so, daß $BE = n$ wird, beschreibe über AE einen Halbkreis, und halbiere

BE in D , errichte in B die senkrechte Linie BF , ziehe die Linie FD , und beschreibe mit FD den Kreisbogen FC ; so ist BC das verlangte Stück.

Beweis. Es ist $AB : BF : BE$ [§. 80. *Zus. II.*], also $BF^2 = AB \cdot BE = an$.

Auch ist $FD^2 = FB^2 + BD^2$, also

$CD = FD = \sqrt{[an + \frac{1}{4}n^2]}$, weil $BD = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}n$, und $BD^2 = \frac{1}{4}n^2$ ist.

Es ist demnach

$$BC = CD - BD \\ = \sqrt{[an + \frac{1}{4}n^2]} - \frac{1}{2}n = x.$$

Der zweyte Werth von x für das negative Wurzel-Zeichen kann, da er ganz negativ ausfällt, nicht gebraucht werden, weil dieser Werth von BC darauf deutet, daß der Theilungspunct rechts von B liegen soll, welches aber unmöglich ist, weil auf dieser Seite von B nichts von der Linie AB liegt.

§. 58.

Aufgabe. (Fig. 182.). Man soll zwey Linien finden, deren Quadrate einem gegebenen Quadrate, und deren Rechteck einem gegebenen Rechtecke gleich ist.

Auflösung. Es sey $AB = a$ die Seite des gegebenen Quadrates und $CD = b$, $DE = c$ die Seiten des gegebenen Rechteckes. Man setze die beyden zu suchenden Linien x und y , so ist nach der Aufgabe:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ und } xy = bc.$$

Daraus ist $y = \frac{bc}{x}$ und

$$x^2 + \frac{b^2c^2}{x^2} = a^2$$

$$x^4 + b^2c^2 = a^2x^2$$

$$x^4 - a^2x^2 + (\frac{1}{2}a^2)^2 = \frac{1}{4}a^4 - b^2c^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2}a^2 = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2}, \text{ also}$$

$$x = \sqrt{[\frac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2}]} = \sqrt{[\frac{1}{2}[a^2 \pm \sqrt{(a^2 + 2bc)(a^2 - 2bc)}]]}.$$

Aus obiger Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ ist $y^2 = a^2 - x^2$ und, wenn man statt x seinen Werth substituirt,

$$y^2 = a^2 - \frac{1}{2}a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2} = \frac{1}{2}a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2}, \text{ und}$$

$$y = \sqrt{[\frac{1}{2}a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2}]} = \sqrt{[\frac{1}{2}[a^2 \mp \sqrt{(a^2 + 2bc)(a^2 - 2bc)}]]}.$$

Construction. Man suche zu AB , DG und DE oder zu a , b und c die vierte geometrische Proportional-
linie z [§. 74. 2.], beschreibe über AB einen Halbkreis,
errichte in B einen Perpendicular $BG = z$, ziehe $GH \parallel AB$
und endlich AH und HB , welche die gesuchten Linien sind.

Beweis. Man ziehe HC und den Perpendicular HI auf
 AB . Da z die vierte geometrische Proportionallinie zwi-
schen a , b und c [Constr.], oder $a : b = c : z$ ist, so muß
 $z = \frac{bc}{a} = BG = HI$ seyn.

Nun ist, im rechtwinkligen Dreyecke CHI ,

$$CI^2 = CH^2 - HI^2 \text{ und}$$

$$CI = \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - z^2\right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]}.$$

Mithin $AI = AC + CI$

$$= \frac{1}{2}a + \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]} \text{ und}$$

$$IB = CB - CI = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]}.$$

Ferner ist $AI : AH : AB$ [§. 80. Zus. I.], also

$$\begin{aligned} AH^2 &= AI \cdot AB = \frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]} \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right]}. \end{aligned}$$

Ebenso ist $AB : HB : IB$, also

$$\begin{aligned} HB^2 &= AB \cdot IB = \frac{1}{2}a^2 - a\sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]} \\ &= \frac{1}{2}a^2 - \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right]}. \end{aligned}$$

Daher $x = AH = \sqrt{\left[\frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right)}\right]}$ und

$$y = HB = \sqrt{\left[\frac{1}{2}a^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right)}\right]}.$$

Synthetischer Beweis. Es ist $AHB = R$, folglich
 $AH^2 + HB^2 = AB^2$, welches der erste Theil der For-
derung der Aufgabe ist. Ferner ist nach Obigem $a : b$
 $= c : z$ oder $AB : DG = DE : GB$, also auch:

$$DG \cdot DE = AB \cdot GB = AB \cdot HI.$$

Aber $\frac{1}{2} AB \cdot HI = \triangle ABH = \frac{1}{2} AH \cdot HB$, mithin

$AB \cdot HI = AH \cdot HB = DG \cdot DE$, wodurch
die zweyte Bedingung der Aufgabe erfüllt ist.

§. 59.

Aufgabe. (Fig. 183.) Es ist im Endpunkte B eines
Durchmessers AB auf diesem eine Senkrechte BC errich-

tet; man soll in dieser Senkrechten einen Punct D finden, so daß, wenn man von diesem Puncte D nach dem andern Endpuncte des Durchmessers, A , eine gerade Linie, DA , zieht, der außerhalb des Kreises liegende Theil derselben, DE , einer gegebenen geraden Linie, mn , gleich sey.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $mn = b$, $AD = x$, man ziehe BE , so ist $AEB = R = ABD$

$$EAB = DAB$$

folgl. $\triangle ABE \cong \triangle DAB$ und

$$AD : AB = AB : AE, \text{ oder}$$

$$x : a = a : x - b, \text{ woraus}$$

$$x^2 - bx = a^2$$

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2} [b + \sqrt{4a^2 + b^2}].$$

Construction. Auf der Senkrechten BC nehme man $BH = mn = b$, beschreibe um BH einen Kreis, ziehe durch dessen Mittelpunkt O und durch A die Linie AF , beschreibe mit AF einen Kreisbogen, welcher die Linie BC in D schneidet, so ist D der gesuchte Punct, durch welchen nach A man die Linie AD ziehen muß, wenn $ED = mn = b$ seyn soll.

Beweis. $AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$, daher $AF = AD = AO + OF = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} + \frac{1}{2}b = x$.

§. 60.

Aufgabe. (Fig. 184.) Es ist ein Quadrant ACB gegeben; man soll in demselben einen Kreis beschreiben, der sowohl den Bogen, als die beyden Halbmesser berühre.

Auflösung. Es sey $AC = BC = a$. Der im Quadranten beschriebene Kreis DFG berühre den Bogen in G , und die beyden Radien in D und F ; daher $EG = ED = EF = x$. Da $EDC = R = EFC = DCF$, folglich auch $DEF = R$, und überdieß $ED = EF$ ist, so ist FD ein Quadrat und $ECB = \frac{1}{2}R$. Die Linie CE geht verlängert durch den Berührungspunct G .

Nun ist $EC^2 = EF^2 + FC^2$ und

$$EC = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}.$$

Ferner ist $CG = EC + GE = x\sqrt{2} + x = a$,

folglich $x[\sqrt{2} + 1] = a$ und

$$x = \frac{a}{\sqrt{2} + 1} = a\sqrt{2} - a = a[\sqrt{2} - 1].$$

Construction. Man halbiere den rechten Winkel ACB durch GC , an G ziehe man die Tangente GH , welche die Verlängerung von CA in H schneidet, mache $CF=AH$, und errichte in F die senkrechte Linie EF . Aus E , wo letztere die Linie GC schneidet, beschreibe man mit EF einen Kreis, so muß dieser den Bogen AB in G und die beyden Radien BC und AC in D und F schneiden.

Bewei. Da $CGH=R$ und $GCH=\frac{1}{2}R$ ist, so muß $CG=GH=a$ und $CH=\sqrt{CG^2+GH^2}=a\sqrt{2}$, mithin $FC=AH=CH-AC=a\sqrt{2}-a=x$ seyn.

Synthet. Beweis. Man fälle ED senkrecht BC , dann ist $EDC=R=EFC$, $DCE=ECF$ und $CE=CE$, folglich $\triangle EDC \cong \triangle EFC$, also auch $ED=EF$, d. h. der mit EF beschriebene Kreis geht durch D , und berührt also AC und BC . Es ist ferner $GC=GH$, weil $HGC=R$ und $GCH=\frac{1}{2}R=GHC$ ist, auch $AH=FC$ [Constr.], folglich $HF=AC=HG$ und, wenn man FG zieht, $HGF=HFG$. Endlich ist

$HGE=EFH=R$, also auch $HGE-HGF=EFH-HFG$ oder $0=y$, also auch $EF=EG$, d. h. der mit EF beschriebene Kreis geht auch durch einen Punct G des Quadranten.

§. 61.

Aufgabe. (Fig. 140.) Der Durchmesser eines Kreises ist gegeben; man soll die Seite des darum beschriebenen gleichseitigen Dreyeckes finden.

Auflösung. Es sey EFG das verlangte Dreyeck und $HM=d$, so wie $FG=x$. Es ist $EM=\sqrt{EF^2-FM^2}=\sqrt{\frac{3}{4}x^2}=\frac{x}{2}\sqrt{3}$. NO ist senkrecht auf EF [§. 55. Geometrie], also $O=M=R$ und y gemeinschaftlich, folglich $\triangle EFM \sim \triangle EON$ und

$$EM:FM=EO:ON, \text{ oder}$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{3}:\frac{x}{2}=\frac{x}{2}:\frac{1}{2}d, \text{ woraus } x=d\sqrt{3}.$$

I. Zusatz. Da $x=d\sqrt{3}$, also auch $x^2=3d^2$ ist, so ist auch $3d:x:d$, d. h. die Seite des regulären Dreyeckes um den Kreis ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem dreyfachen und einfachen Diameter. Daher ist auch die Contruction leicht zu finden.

II. Zusatz. Da $\triangle EFM \sim \triangle EON$ [Aufl.] ist, so muß auch $EF : FM = EN : ON$, und, da $EF = 2FM$ ist, auch $2 : 1 = EN : \frac{1}{2}d$, mithin $EN = d$, folglich $EH = HN = NM = \frac{1}{2}d$ seyn.

§. 62.

Aufgabe. (Fig. 185.) Man soll ein rechtwinkliges Dreyeck ABC construiren, welches so beschaffen ist, daß die Linien AE und CD von den Spitzen A und C nach der Mitte der ihnen gegenüberstehenden Seiten, den gegebenen Linien m und n gleich werden.

Auflösung. (Fig. 185.) Es sey $BD = x$, also $DC^2 - BD^2 = BC^2 = n^2 - x^2$, mithin $BE^2 = \frac{1}{4}BC^2 = \frac{n^2 - x^2}{4}$.

Ferner $AE^2 = AB^2 + BE^2$, oder

$$m^2 = 4x^2 + \frac{n^2 - x^2}{4} = \frac{15x^2 + n^2}{4}, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{4m^2 - n^2}{15}\right]} = BD \text{ und } BC = \sqrt{n^2 - x^2} = \sqrt{\left[\frac{16n^2 - 4m^2}{15}\right]}.$$

Construction. Man ziehe GC beliebig, und errichte darauf AB senkrecht, mache $BF = \frac{1}{2}n$, schneide aus F mit m die Linie GC in I , nehme KB auf AB beliebig, schneide aus K mit $4KB$ die Linie GC in l , ziehe $IH \parallel lK$; aus H mit $\frac{1}{2}n$ durchschneide man BC in E , mache endlich $BC = 2BE$ und $AB = 4BH$, ziehe dann AC , so ist das $\triangle ABC$ das gesuchte.

Analytischer Beweis. Es ist $IF = m$ und $FB = \frac{1}{2}n$ [Constr.], folglich $BI^2 = m^2 - \frac{1}{4}n^2$. Ferner, da $IH \parallel lK$, ist:

$IH : BH = lK : BK = 4 : 1$ [Constr.], mithin $IH = 4BH$; dann $BI^2 = IH^2 - EH^2 = 15BH^2 = m^2 - \frac{1}{4}n^2$, also $BH^2 = \frac{m^2 - \frac{1}{4}n^2}{15}$; es ist aber $x = 2BH$,

folglich $\frac{1}{4}x^2 = \frac{m^2 - \frac{1}{4}n^2}{15}$, woraus $x = \sqrt{\left[\frac{4m^2 - n^2}{15}\right]}$, wie oben ist.

Synthetischer Beweis. Da $BD = 2BH = \frac{1}{2}AB$ und $BC = 2BE$ ist, so muß $DC = 2HE = n$ seyn. — Da

ferner $IH \parallel IK$ ist, so muß $IH : BH = IK : BK = 4 : 1$, also $IH = 4BH = AB$ seyn; also $AE^2 = AB^2 + BE^2 = IH^2 + BE^2$ (Anstatt IH u. BE die Werthe nach §. 80. Z. III.)

$$AE^2 = IB^2 + BH^2 + HE^2 - BH^2$$

$$= IB^2 + HE^2 = IB^2 + \frac{1}{4}n^2$$

$$= IF^2 - FB^2 + \frac{1}{4}n^2 = IF^2 \quad (\text{da } FB = \frac{1}{2}n$$

ist); also $AE = IF = m$.

§. 63.

Aufgabe. Die drey Seiten eines Dreyeckes sind a , b , c ; man soll 1) den Radius des darum und 2) den Radius des darin beschriebenen Kreises finden.

Auflösung. 1) (Fig. 186.) Es sey $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Man fälle AD senkrecht auf BC , so ist $\triangle ABC = \frac{a \cdot AD}{2}$. Man ziehe durch A den Diameter AE und die Linie EC , so ist, da $B = E$ und $ADB = ACE = R$ ist, $\triangle ABD \sim \triangle AEC$, also $AB : AD = AE : AC$, oder $c : AD = 2r : b$, also $AD = \frac{bc}{2r}$. Daher $\triangle ABC =$

$$\frac{abc}{4r} = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

[§. 26. g. A.], woraus

$$r = \frac{abc}{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}} \text{ ist.}$$

Beyspiel. Für $a = 9$, $b = 7$, $c = 3$ ist $r = 5,37...$

2) (Fig. 69.) Gesetzt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Man construire nach §. 55. den Kreis im Dreyecke, ziehe AD , BD und CD , und setze $FD = DG = DE = r$. Nun ist:

$$\triangle ABC = \triangle BDC + \triangle ADC + \triangle ADB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = r \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

[§. 26. geom. Aufg.].

$$\text{Also } r = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}}.$$

§. 64.

Aufgabe. (Fig. 187.) Es sind die vier Seiten eines

Viereckes im Kreise gegeben, man soll die beyden Diagonalen und den Inhalt des Viereckes finden.

Auflösung. I. 1) Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $DA = d$, dann $AC = y$ und $BD = x$. Man mache $AK = DC = c$, und ziehe BK .

Es ist $ABK = DBC$, $BAC = BDC$, also $\triangle ABK \sim \triangle BDC$ und $AB : AK = BD : DC$, folgl. $AB \cdot DC = AK \cdot BD$ od. $a \cdot c = x \cdot AN$.

Es ist $ABK = DBC$, also auch $ABK + KBD = DBC + KBD$ oder $ABD = KBC$, ferner $ADB = ACB$, also

$\triangle ABD \sim \triangle NBC$ und

$AD : BD = NC : BC$, also $AD \cdot BC = BD \cdot NC$, oder

$$d \cdot b = x \cdot NC. \text{ Nun ist:}$$

$$a \cdot c = x \cdot AN, \text{ also}$$

$$d \cdot b + a \cdot c = x \cdot [AN + NC] = x \cdot y.$$

2) Da $\triangle ABD \sim \triangle BCN$ [1.] ist, so wird:

$$AB : BD = BN : BC, \text{ also } BN = \frac{AB \cdot BC}{BD}, \text{ ferner,}$$

da $\triangle ANK \sim \triangle BCN \sim \triangle ABD$ ist, auch:

$$AK : KN = BD : AD, \text{ also } KN = \frac{AK \cdot AD}{BD} = \frac{DC \cdot AD}{BD},$$

$$\text{daher } BK = BN + KN = \frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{BD}. \text{ Macht man}$$

auch $BF = DC$, so ist der Analogie nach:

$$AF = \frac{AB \cdot AD + DC \cdot BC}{AC}.$$

3) Nun ist $BK = AF$ [§. 57. Zus. III. G.], also:

$$\frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{BD} = \frac{AB \cdot AD + DC \cdot BC}{AC} \text{ [2.], und}$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{AB \cdot AD + DC \cdot BC} \text{ od. } \frac{x}{y} = \frac{ab + cd}{ad + bc}, \text{ wor. (u. aus 1.)}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \right]} \text{ u. } y = \sqrt{\left[\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \right]}.$$

II. 1) Man fälle $BG = v$ und $DM = w$ auf d und b senkrecht, und setze $CM = z$, so ist, da $BAG = DCM$ ist, $\triangle ABG \sim \triangle DCM$ und $c : z = a : AG$, also $AG = \frac{a}{c} z$. Ferner ist aus $\triangle DBM$ und $\triangle DCM : x^2 = [b + z]^2$

$$+ DM^2 = b^2 + 2bz + z^2 + c^2 - z^2 = b^2 + c^2 + 2bz.$$

Ebenso aus $\triangle BGD$ und $\triangle ABG$:

$$e^2 = [d - AG]^2 + GB^2 = d^2 - 2dAG + AG^2 + a^2 - AG^2 \\ = a^2 + d^2 - 2dAG = a^2 + d^2 - \frac{2ad}{c} z, \text{ daher:}$$

$$b^2 + c^2 + 2bz = a^2 + d^2 - \frac{2ad}{c} z, \text{ wor. } z = \frac{c}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}.$$

2) Es ist $w = \sqrt{c^2 - z^2}$, und, da $c : w = a : v$ ist, auch $v = \frac{a}{c} w = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - z^2}$.

$$\text{Ferner } \triangle BCD = \frac{1}{2} bw \text{ und } \triangle ABD = \frac{1}{2} dv = \frac{ad}{2c} w,$$

$$\text{folgl. } ABCD = \frac{bw}{2} + \frac{ad}{2c} w = w \frac{bc + ad}{2c} = \frac{ad + bc}{2c} \sqrt{c^2 - z^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } c^2 - z^2 &= [c + z][c - z] = \\ &= c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} \right] \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} \right] = \\ &= c^2 \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} \cdot \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)} = \\ &= \frac{c^2}{4(ad + bc)^2} (a + b + d - c)(a + d + c - b)(a + b + c - d)(b + c + d - a); \text{ also} \end{aligned}$$

$$ABCD = \frac{1}{4} \sqrt{[(a + b + d - c)(a + d + c - b)(a + b + c - d)(b + c + d - a)]}.$$

Zusatz. Bey jedem Vierecke im Kreise ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten des Viereckes. [Aufl. I. 1.]

§. 65.

Aufgabe. (Fig. 187.) Aus den vier Seiten eines Viereckes, worin sich die gegenüberstehenden Winkel zu $2R$ ergänzen, soll der Radius des darum beschriebenen Kreises gefunden werden.

Auflösung. a, b, c und d seyen die vier Seiten, r der verlangte Radius und $BD = x$. Es ist nach §. 63.

$$\triangle BCD = \frac{bcx}{4r} \text{ und } \triangle ABD = \frac{adx}{4r}, \text{ also } ABCD =$$

$$\frac{(ad + bc)x}{4r} = \frac{\sqrt{[(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)]}}{4r} \quad [\text{§. 64. I. 3.}]$$

Setzt man diesen Ausdruck nun gleich dem für $ABCD$ in §. 64. II. 2.; so entsteht daraus:

$$r = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a)}}.$$

§. 66.

Aufgabe. Von einem Vierecke, welches sowohl in als

um einen Kreis sich befindet, sind drey Seiten a , b und c gegeben; man soll 1) die vierte Seite, 2) den Inhalt M , 3) den Radius R des *darum* 4) den r des *darin* beschriebenen Kreises und 5) die Diagonalen des Viereckes entwickeln.

Auflösung. (Fig. 188.) Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = x$, dann $AN = BN = CN = DN = R$ und $EM = FM = GM = HM = r$, so wie $AC = y$ und $BD = x$.

1) Da

$EM = FM$ ist, so muß $\triangle BEM \cong \triangle BMF$ u. $BE = BF$ seyn
 $FM = MG$ „ „ „ $\triangle MFC \cong \triangle MGC$ „ $GC = FC$ „
 $MG = MH$ „ „ „ $\triangle MDG \cong \triangle MHD$ „ $GD = HD$ „
 $HM = ME$ „ „ „ $\triangle MHA \cong \triangle MAE$ „ $AE = HA$ „

folgl. ist $BE + GC + GD + AE = BF + FC + HD + HA$,
 oder $a + c = b + x$, woraus $x = a + c - b$ ist.

2) Substituirt man diesen Werth von x für d in §. 64. II. 2., so wird:

$ABCD = \sqrt{abc[a+c-b]} = \sqrt{abcx} = M$, und dann nach §. 65.

$$3) R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cx)(ac+bx)(ax+bc)}{abcx}}.$$

4) Da $\triangle ABM + \triangle BMC + \triangle CMD + \triangle DMA = ABCD$
 ist, so ist auch $\frac{(a+b+c+x)r}{2} = M = \sqrt{abcx}$,

$$\text{woraus } r = \frac{2\sqrt{abcx}}{(a+b+c+a+c-b)} = \frac{\sqrt{abcx}}{a+c} \text{ ist.}$$

5) Die Werthe der Diagonalen x und y sind aus §. 64. I. leicht zu finden.

Zusatz. Bey jedem Vierecke, in welchem ein Kreis beschrieben ist, sind die Summen der beyden gegenüberstehenden Seiten gleich. [Aufl. 1.]

§. 67.

Aufgaben. (Fig. 189.) 1.) Es sind zwey Punkte A und B und eine gerade Linie CD gegeben; man soll in CD einen Punkt H finden, welcher von A und B gleichweit absteht.

Auflösung. Da die beyden Punkte A und B gegeben

sind, so sind es auch die Senkrechten $AG = a$, $BF = b$ und $FG = c$. Man setze H sey der verlangte Punct, und $FH = x$, so ist $HG = c - x$. Es soll, der Aufgabe gemäß, $BH = AH$ werden.

Da $BH^2 = b^2 + x^2$ und $AH^2 = a^2 + (c - x)^2$ ist, so muß $b^2 + x^2 = a^2 + (c - x)^2 = a^2 + c^2 - 2cx + x^2$,
und $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$ seyn.

Construction. Man ziehe AB , und errichte in dessen Mitte I die Senkrechte IH , so ist H der verlangte Punct. (Der Beweis beruht auf §. 24. Geom.).

2) Es sind zwey Puncte A und B , dann die gerade Linie CD gegeben; man soll einen Punct H in CD finden, für welchen AH und BH gleiche Neigungswinkel mit CD bilden.

Auflösung. Man fälle $AG = a$ und $BF = b$ senkrecht auf CD , und setze $FG = c$, dann $FH = x$; so ist $HG = c - x$, und da $BHF = AHG$ seyn soll, so ist $\triangle BHF \sim \triangle AHG$, daher:

$BF : FH = AG : HG$, oder $b : x = a : c - x$, woraus

$$x = \frac{bc}{a + b} \text{ ist.}$$

Construction. Man verlängere die Senkrechte BF , mache $FK = BF$, und ziehe AK , so ist H der Durchschnittspunct, wofür $BHF = FHK = AHG$ ist.

§. 68.

Aufgabe. (Fig. 190.) In einem Dreyecke sind die geraden Linien $AD = a$, $BE = b$ und $CF = c$, von den Ecken nach den Mittelpuncten der gegenüberliegenden Seiten gegeben; man soll die Seiten $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$ finden.

Auflösung. Man fälle AG senkrecht auf CB , und setze $BG = m$, so ist:

$$\begin{aligned} a^2 &= AG^2 + GD^2 = AB^2 - GB^2 + [GB - BD]^2 \\ &= AB^2 - GB^2 + GB^2 - 2GB \cdot BD + BD^2 = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - ym \\ z^2 &= AG^2 + CG^2 = x^2 - m^2 + (y - m)^2 = x^2 - m^2 + y^2 - 2ym + m^2 = x^2 + y^2 - 2ym. \end{aligned}$$

Multipliziert man die vorletzte Gleichung mit 2 und subtrahirt man davon letztere, so entsteht:

$$1) 2a^2 - x^2 = x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Auf ähnliche Art folgt:

$$2) 2b^2 - x^2 = y^2 - \frac{1}{2}z^2, \text{ und } 3) 2c^2 - y^2 = z^2 - \frac{1}{2}x^2.$$

Aus diesen drey Gleichungen ist dann:

$$x = \frac{2}{3} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}, y = \frac{2}{3} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \text{ und } z = \frac{2}{3} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

§. 69.

Aufgabe. Von einem Dreyecke sind die Summe zweyer Seiten $= a$ und die beyden Höhen b und c auf dieselben gegeben; man soll die Seiten selbst finden.

Auflösung. Gesetzt x sey die eine, folglich $a - x$ die andere Seite. Ist nun c die Höhe auf jene und b die Höhe auf diese Seite, so folgt, daß der Inhalt des Dreyeckes sowohl durch $\frac{1}{2}cx$, als auch durch $\frac{1}{2}b[a - x]$, ausgedrückt werden kann, daher $cx = b[a - x]$, woraus

$$x = \frac{ab}{b + c} \text{ und } a - x = \frac{ac}{b + c} \text{ ist.}$$

Construction des Dreyeckes. (Fig. 191.) Man mache $AB = b$, $BC = c$, $EAC = R$, schneide mit $DC = a$ die Linie AE in D , mache $DCF = R$, $CF = BC = c$; ziehe $GF \parallel DC$ und $HB \parallel AD$, ziehe endlich HG ; so ist $\triangle DGH$ das verlangte.

Beweis. Man fälle GI senkrecht auf DC , so ist $\triangle DGI \cong \triangle HBC$ (indem $GI = FC = BC = c$, $I = B$ und $GDI = BHC$ ist); folglich muß $GD = HC$, also $GD + DH = HC + DH = DC = a$ seyn. Ferner ist die Senkrechte $HK = AB = b$ und $GI = c$.

§. 70.

Aufgabe. Von einer Figur, z. B. von einem Rechtecke, ist der Inhalt F gegeben; man soll den dazu gehörigen Maßstab finden.

Auflösung. Man nehme eine beliebige Länge, z. B. a Fufs, theile dieselbe in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile, nehme jeden dieser Theile als Längen-Einheit an, und berechne hiernach den Inhalt der gegebenen Figur; gesetzt man erhalte nicht den gegebenen Inhalt F , sondern M , so fragt sich:

1) welche Länge $= x$ hätte man, statt der von a

Fufs, nehmen müssen, damit der *n*te Theil dieser Länge *x* die verlangte Einheit geworden wäre, nach welcher die Figur $\equiv F$ ist.

2) in wieviel gleiche Theile *y* hätte man die willkürliche Länge *a* theilen müssen, damit jeder Theil die verlangte Einheit geworden wäre, nach der die Figur $\equiv F$ ist.

ad 1) Gesetzt nach dem willkürlichen Mafsstabe *a* enthalte die Grundlinie des Rechteckes *c*, und die Höhe *d* Theile, so ist $M \equiv cd$. — Es enthalten aber die *c* Theile $\frac{c}{n} a$ Fufs, die *d* Theile $\frac{d}{n} a$ Fufs, und der absolute Inhalt des Rechteckes ist $\frac{cd}{n^2} a^2 \equiv \frac{M}{n^2} a^2 \square'$. Gesetzt ferner, nach dem zu bestimmenden Mafsstabe von *x* Fufs Länge, in *n* gleiche Theile getheilt, enthalte die Grundlinie des Rechteckes *r*, die Höhe *k* solche Theile, also ist $rk \equiv F$.

Es enthalten aber die *r* Theile $\frac{r}{n} x$ Fufs, und die *k* Theile $\frac{k}{n} x$ Fufs, also das Rechteck $\frac{rk}{n^2} x^2 \equiv \frac{F}{n^2} x^2 \square'$.

Daher die Gleichung:

$$\frac{M}{n^2} a^2 \equiv \frac{F}{n^2} x^2, \text{ oder } F : M \equiv a^2 : x^2, \text{ woraus } x \equiv a \sqrt{\frac{M}{F}}.$$

ad 2) Es ergibt sich hier der absolute Flächenraum in Quadratfufs, ein Mahl $\equiv \frac{M}{n^2} a^2$ das andere Mahl $\equiv \frac{F}{y^2} a^2$, woraus

$$M : F \equiv n^2 : y^2 \text{ und } y \equiv n \sqrt{\frac{F}{M}}.$$

Jede der gefundenen beyden Formeln löset die Aufgabe, doch ist die erstere bequemer. Da sich jede geradlinige Figur in ein Rechteck verwandeln läfst, so ist die Form der gegebenen Figur ganz gleichgültig.

Beyspiel. Der Mafsstab einer nach demselben berechneten Figur von 2000 $\square^\circ$ ist verwischt oder verloren gegangen; man soll denselben durch Rechnung bestimmen.

Auflösung. Man theile eine beliebige Länge, z. B. einen Bayer. Fufs, in beliebig viele gleiche Theile z. B. in 300, lasse jeden Theil eine Ruthe gelten, und berechne darnach die gegebene Figur. Gesetzt man erhalte nicht

2000, sondern $1200 \square^{\circ}$. Es ist hier $a = 1$ Bayer. Fufs, $F = 2000 \square^{\circ}$, $M = 1200 \square^{\circ}$ und $n = 300$, folglich aus 1):

$$x = 1 \sqrt{\frac{1200}{2000}} = 0,774, \text{ d. h. man mu\ss nicht einen}$$

Bayer. Fufs, sondern nur davon $7'' 7''' 4''''$ in 300 gleiche Theile theilen, und jeden eine Ruthe gelten lassen, um den verlangten Ma\ssstab zu erhalten.

Für die Formel von 2) entsteht:

$$y = 300 \sqrt{\frac{2000}{1200}} = 387,298, \text{ d. h. man mu\ss einen Bayer.}$$

Fufs nicht in 300, sondern in 387,298 gleiche Theile theilen, und jeden Theil eine Ruthe für den verlangten Ma\ssstab gelten lassen.

§. 71.

Aufgabe. Das $\triangle ABC$ (Fig. 192.) in ein Trapez zu verwandeln, in welchem $BC = a$ die eine Parallele, dann ABC und BCD die beyden anliegenden Winkel sind.

Auflösung. Man ziehe $AD \parallel BC$, setze $AD = b$, die Höhe $AG = h$, ferner ziehe man $EF \parallel BC$, betrachte BF als das verlängte Trapez, und setze $EF = y$ und $HG = x$, so entsteht die Gleichung $\frac{y+a}{2} x = \frac{ah}{2}$.

Man ziehe $IC \parallel AB$, dann ist $b - a : y - a = h : x$ [§. 83.], also $(b - a) x = (y - a) h$, und es ist $y = \sqrt{ab}$.

Construction. Man beschreibe über AD einen Halbkreis, ziehe $BK \parallel CD$, so ist $DK = BC = a$, errichte in K auf AD die Senkrechte KL , und ziehe LD , so ist $LD = \sqrt{ab} = y$. Macht man nun $MD = LD$ und zieht man $ME \parallel CD$ und dann $EF \parallel BC$; so ist $EF = MD = LD = y$, folglich BF das verlangte Trapez.

Beweis. Man verlängere AB und CD bis sie sich in N schneiden, dann ist $\triangle EFN \sim \triangle BCN$; also:

$$\triangle EFN : \triangle BCN = EF^2 : BC^2 = LD^2 : KD^2 = AD : KD : KD^2 = AD : KD,$$

folgl. $\triangle EFN - \triangle BCN : \triangle BCN = AD - KD : KD = AK : BC$, oder $BF : \triangle BCN = AK : BC$. Nun ist auch:

$\triangle ABC : \triangle BCN = AB : BN$ und, weil $\triangle ABK \sim \triangle BCN$, auch $AB : BN = AK : BC$, also $\triangle ABC : \triangle BCN = AK : BC$.

Da nun schon $BF : \triangle BCN = AK : BC$ ist,

so mu\ss $\triangle ABC = BF$ seyn.

§. 72.

Aufgabe. Jede Figur in ein gleichseitiges Dreyeck zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle die gegebene Figur in ein Dreyeck, dessen Grundlinie $= b$ und Höhe $= h$ sey. Die Seite des verlangten Dreyeckes sey x , seine Höhe y . Dann ist $bh = xy$ und $x^2 = (\frac{x}{2})^2 + y^2$, also hieraus $y = \sqrt{h \frac{1}{2} b \sqrt{3}}$.

Betrachtet man diese Formel, so ergibt sich, daß $\frac{1}{2} b \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4} b^2} = \sqrt{b^2 - (\frac{b}{2})^2}$ d. i. die Höhe eines mit der Seite b gezeichneten gleichseitigen Dreyeckes ist. Wird diese c genannt, so ist $y = \sqrt{h \cdot c}$, d. h., wenn irgend ein Dreyeck in ein gleichseitiges verwandelt werden soll, so ist dessen Höhe y die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Höhe h des gegebenen Dreyeckes und der Höhe $c = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$ des mit der Grundlinie desselben gezeichneten gleichseitigen Dreyeckes.

Construction. (Fig. 193.) Es sey ABC das gegebene Dreyeck, von welchem $BC = b$ als Grundlinie, also $AF = h$ als Höhe genommen wird. Man zeichne mit CB das gleichseitige $\triangle EBC$ und dessen Höhe ED , mache $EG \parallel DF$, also $GF = DE$ und bilde FH als mittlere geometrische Proportionallinie zwischen $AF = h$ und $GF = ED = c = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$ [§. 80. Zus. I.]; dann ist $FH = y =$ der Höhe des zu suchenden Dreyeckes. Macht man nun $LD = FH$, und zieht man $LM \parallel EB$ und $LN \parallel EC$, so ist LMN das gesuchte Dreyeck.

Beweis.

$$\triangle ECB : \triangle LMN = ED^2 : LD^2 = GF^2 : HF^2 = GF^2 : AF \cdot GF \\ = GF : AF = ED : AF, \text{ da}$$

aber auch $\triangle ECB : \triangle ABC = ED : AF$ [§. 69. G.] ist,

so muß $\triangle LMN = \triangle ABC$ seyn.

§. 73.

Aufgabe. (Fig. 194.) Durch einen gegebenen Punct D innerhalb eines Winkels ABC eine gerade Linie EF so zu ziehen, daß dadurch ein Dreyeck BEF abgeschnitten werde, welches so groß ist als ein Parallelogramm BH .

Auflösung. Es sey $DH = a$, $GD = b$, $KF = x$

und die Senkrechte $GM = h$, so ist, wenn $DL \parallel AB$ ist, $\triangle DLF \sim \triangle BEF$, also:

$$\triangle DLF : \triangle BEF = LF^2 : BF^2 \text{ od. } (a+x)^2 : \triangle BEF = (a+x)^2 : (a+b+x)^2;$$

$$\text{also } \triangle BEF = \frac{h(a+b+x)^2}{2(a+x)}. \text{ Nun ist } BH = h(a+b),$$

$$\text{also } \frac{h(a+b+x)^2}{2(a+x)} = h(a+b), \text{ woraus } x = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ist.}$$

Construction. Man errichte in K eine Senkrechte $KO = GD = b$, und durchschneide aus O mit $DH = a$ die Linie BC in F , welcher Punct mit D die Richtung von EF bestimmt.

Beweis. Es ist $KF = \sqrt{OF^2 - KO^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = x$. Auch ist:

$$\triangle KNF : \triangle EGD = KF^2 : GD^2 = a^2 - b^2 : b^2, \text{ folglich}$$

$$\triangle KNF + \triangle EGD : \triangle EGD = a^2 : b^2, \text{ nun ist auch}$$

$$\triangle DNH : \triangle EGD = a^2 : b^2, \text{ folglich:}$$

$$\triangle KNF + \triangle EGD = \triangle DNH, \text{ also auch } \triangle BEF = BH.$$

Zusatz. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist nur möglich, wenn $a > b$ ist.

§. 74.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreyeck in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Umfang einer gegebenen Linie ($= 4a$) gleich wird.

Auflösung. Eine Seite des Dreyeckes sey b , seine Höhe $2h$, die zu bestimmenden Seiten des Rechteckes x und y , so ist $x + y = 2a$ und $xy = bh$,

woraus $\begin{cases} x \\ y \end{cases} = a \pm \sqrt{a^2 - bh}$ ist, d. h. Man nehme den vierten Theil der gegebenen Linie und die Kathete eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen Hypotenuse dieser vierte Theil und dessen andere Kathete die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen der Grundlinie und halben Höhe des Dreyeckes; so ist die Summe dieser beyden Linien die grössere, die Differenz aber die kleinere Seite des gesuchten Rechteckes.

Construction. (Fig. 195.) Es sey ABC das gegebene Dreyeck und AD dessen Höhe. Man mache $BE = \frac{1}{2} AD$, beschreibe über EC einen Halbkreis, errichte $BF (= \sqrt{bh})$

senkrecht auf EC , nehme $FG = a$ dem vierten Theile des gegebenen Umfangs (dadurch wird $BG = \sqrt{a^2 - bh}$), und beschreibe damit aus G den Halbkreis HK , dann ist $BK (= GK + BG = a + \sqrt{a^2 - bh})$ die eine, und $BH (= HG - BG = a - \sqrt{a^2 - bh})$ die andere verlangte Seite. Nimmt man $BN (= BH)$ senkrecht auf BK , und zieht man $MN \parallel BK$, und $KM \parallel EN$, so ist BM das langte Rechteck.

§. 75.

Aufgabe. (Fig. 196.) Es ist ein Winkel ABC und innerhalb desselben ein Punct D gegeben; man soll einen Kreis construiren, der durch D geht, und beyde Schenkel des Winkels tangirt.

1) *Auflösung.* Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muß nothwendig in der Halbierungslinie BN des Winkels liegen, indem beyde Schenkel desselben Tangenten werden sollen. Gesetzt E sey der gesuchte Mittelpunkt. Man fälle $DG [= h]$ senkrecht auf BN , ebenso EF auf AB , setze $BH = a$, $BG = b$, $BF = x$, $BE = y$, so ist $EF^2 = y^2 - x^2$ und $ED^2 = (b - y)^2 + h^2$, also gemäß der Aufgabe $y^2 - x^2 = (b - y)^2 + h^2$. Weil nun $BE : EF = BH : BG$ ist, so ist auch $by = ax$ und aus diesen beyden Gleichungen $x = a \pm \sqrt{a^2 - b^2 - h^2}$; daher folgende

Construction. Es ist $HG^2 = a^2 - b^2$; beschreibt man über HG den Halbkreis, und nimmt man $GP = GD$, so ist $HP^2 = a^2 - b^2 - h^2$. Bildet man nun aus H mit HP einen Halbkreis, so ist F der Berührungspunct für den einen und Q der für den andern ebenfalls der Bedingung der Aufgabe entsprechenden Kreis.

Beweis. Errichtet man auf AB in F die Senkrechte FE , so muß man zeigen, daß $FE = ED$ ist. Man ziehe HE , so ist:

$$HE^2 = HF^2 + FE^2 = HP^2 + FE^2 \text{ und auch}$$

$$HE^2 = HG^2 + EG^2 = HP^2 + GP^2 + EG^2 = HP^2 + DG^2 + EG^2 = HP^2 + ED^2$$

folglich $HP^2 + FE^2 = HP^2 + ED^2$, also $FE = ED$.

Anmerk. Das Geschäft wird einfacher, wenn man $HG = d$ und $GB = b$ als gegeben betrachtet, und $HF = z$ setzt; dann ist $z^2 + EF^2 = d^2 + EG^2$, oder $z^2 + EF^2 = d^2 + ED^2 - h^2$. Es soll aber $EF = ED$ seyn, folglich ist

$z^2 = d^2 - h^2$, wornach die Construction leichter zu übersehen ist.

2) *Auflösung.* (Fig. 196. a.) Man ziehe BD , errichte in einem beliebigen Punkte I der Linie AB eine senkrechte IK bis zur Halbirungslinie BN des Winkels ABC , beschreibe aus K mit IK den Bogen IL der BD in L schneidet, ziehe LK und $DE \parallel LK$, so ist E der Mittelpunkt des verlangten Kreises. (Der Beweis ist leicht zu finden.)

§. 76.

Aufgabe. (Fig. 197.) Es ist eine gerade Linie AB und in ihr ein Punkt C gegeben; man soll einen Kreis construiren, der AB in C und zugleich einen gegebenen um D mit DE beschriebenen Kreis berührt.

Auflösung. Man errichte CO auf AB senkrecht, so muß der Mittelpunkt des Berührungskreises in CO liegen. Er sey F . Man setze $CF = x$, dann muß, wenn man LF zieht, auch $GF = x$ seyn. Man fälle $DH = a$ senkrecht auf AB , setze $DE = DG = r$, und $HC = b$, so entsteht, wenn man FP senkrecht auf HD fällt, $FD^2 = PF^2 + PD^2$, oder $(x + r)^2 = b^2 + (a - x)^2$ und daraus $2(a + r)x = b^2 + a^2 - r^2$, oder $2HKx = CD^2 - r^2 = CL \cdot CN$, oder auch, wenn man CN in M halbt, $2 \cdot HK \cdot x = 2CL \cdot CM$, und $HK \cdot x = CL \cdot CM$, wornach x leicht zu construiren ist.

§. 77.

Aufgabe. Ein Dreyeck durch drey gerade Linien in vier congruente Dreyecke zu theilen.

Auflösung. Man halbire die drey Seiten, und verbinde die Halbirungspunkte durch drey gerade Linien. (Der Beweis ist leicht zu finden.)

§. 78.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreyeck in ein anderes zu verwandeln, welches zwey bestimmte Winkel α und β hat.

Auflösung. (Fig. 198.) Es sey ABC das gegebene Dreyeck; man trage in B und C an BC die gegebenen Winkel β und α an, und ziehe $AD \parallel BC$, $DE \parallel BI$, dann mache man $GC = FC = \sqrt{CE \cdot BC}$ [§. 80. Z. I.], und ziehe $GH \parallel DE$, dann ist das $\triangle GHC$ das verlangte.

Beweis. Da $GH \parallel ED \parallel IB$ ist, so ist $HGC = \beta$.
Es ist $\triangle GHC : \triangle DEC = GC^2 : CE^2 = CE : BC$; $CE^2 = BC : CE$,
aber auch $\triangle ABC : \triangle DEC = BC : CE$, also $\triangle GHC = \triangle ABC$.

§. 79.

Aufgabe. Ein Dreyeck aus einem zu bestimmenden Punkte innerhalb in drey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. (Fig. 199.) M sey der Punkt, MN ($\parallel AB$), MO ($\parallel AC$) und AM die Theilungslinien. Denkt man sich PQ durch $M \parallel BC$, fällt man dann auf BC von A die Senkrechte $AR = h$ und von M die $MS = x$; so ist:

$\triangle MNO : \triangle ABC = 1 : 3 = x^2 : h^2$, also $x = h \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} h \sqrt{3}$
Hiernach läßt sich die Lage von PQ construiren, in deren Mitte der Punkt M liegen muß, damit $AMNB = AMOC$ werde etc.

§. 80.

Aufgabe. Die beyden nicht parallelen Seiten eines Trapezes, seine Höhe h und Fläche m sind bekannt; man soll die parallelen Seiten finden.

Auflösung. (Fig. 176.) Es sey $BD = b$, $AC = c$, $AH = h$, $AB = y$, $CD = x$ und $AI \parallel BD$; dann ist $\frac{1}{2} (x + y) h = m$, also $\frac{1}{2} (x + y) = \frac{m}{h}$. Ferner ist $CH = \sqrt{c^2 - h^2}$, $HI = \sqrt{b^2 - h^2}$, also $CI = x - y = \sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}$ und $\frac{1}{2} (x - y) = \frac{1}{2} [\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}]$. Aus diesen beyden Gleichungen folgt:

$$\left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = \frac{m}{h} \pm \frac{1}{2} [\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}].$$

§. 81.

Aufgabe. Innerhalb eines Dreyeckes einen Punkt so zu bestimmen, daß, wenn man von demselben nach den drey Ecken gerade Linien zieht, die entstehenden Dreyecke sich wie $m : n : p$ verhalten.

Auflösung. (Fig. 199.) Man theile eine der drey Seiten des $\triangle ABC$, z. B. BC in drey Theile nach dem Verhältnisse $m : n : p$ [§. 74. 1.]; so, daß $BN : NO : OC = m : n : p$ wird, dann ziehe man $MN \parallel AB$ und $MO \parallel AC$, so ist M der verlangte Punkt. (Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man AN und AO zieht.)

§. 82.

Aufgabe. (Fig. 200.) Im $\triangle ABC$ sind die drey geraden Linien a, b, c von den Ecken nach den Mittelpuncten der gegenüberstehenden Seiten gegeben; man soll durch sie die drey Seiten x, y, z , so wie den Inhalt Q des Dreyeckes finden.

Auflösung. 1) Es ist $AE^2 = z^2 - BE^2 = a^2 - ED^2 = a^2 - [BD - BE]^2$, also $z^2 - BE^2 = a^2 - BD^2 + 2BD \cdot BE - BE^2$, oder $z^2 = a^2 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x^2 + z^2 - y^2}{2}$,

woraus

und der Analogie nach auch
eben so

$$4a^2 + x^2 = 2y^2 + 2z^2$$

$$4b^2 + y^2 = 2x^2 + 2z^2$$

$$4c^2 + z^2 = 2x^2 + 2y^2$$

also die Summe

$$\frac{4}{3} [a^2 + b^2 + c^2] = x^2 + y^2 + z^2$$

und durch Subtraction $x^2 = \frac{4}{9} [2b^2 + 2c^2 - a^2]$, $y^2 = \frac{4}{9} [2a^2 + 2c^2 - b^2]$ und $z^2 = \frac{4}{9} [2a^2 + 2b^2 - c^2]$, (also die drey Seiten.)

2) Es ist $Q = \frac{1}{2} x \cdot AE = \frac{1}{2} x \sqrt{y^2 - [\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2x}]^2}$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[4x^2y^2 - [x^2 + y^2 - z^2]^2]}$$

und daraus auch $4x^2y^2 = 16Q^2 + [x^2 + y^2 - z^2]^2$ oder nach 1)

$$\frac{64}{81} [2b^2 + 2c^2 - a^2][2a^2 + 2c^2 - b^2] = 16Q^2 + \frac{16}{81} [5c^2 - b^2 - a^2]^2$$

(1), woraus $Q^2 = \frac{1}{9} [2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4] = \frac{1}{9} [4a^2b^2 - [a^2 + b^2 - c^2]^2]$ ist; also der Inhalt

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{[a+b+c][a+b-c][a+c-b][b+c-a]}.$$

§. 83.

Aufgabe. (Fig. 201.) Die drey Seiten $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$ eines Dreyeckes sind gegeben; man soll die Entfernung der Mittelpuncte des *um* und *in* dasselbe beschriebenen Kreises finden.

Auflösung. Man setze $a+b+c = S$, $b+c-a = A$, $a+c-b = B$ und $a+b-c = C$. E sey der Mittelpunct des Kreises *um* das Dreyeck, also $EC = r = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{[S \cdot A \cdot B \cdot C]}}$

[§. 63. 1. g. A.], und D der des Kreises *im* Dreyecke, also

$$DF = DH = \rho = \sqrt{\frac{A \cdot B \cdot C}{4S}} \quad [\text{§. 63. 2. g. A.}].$$

Es ist $AO = AH$, $HC = FC$, $BO = BF$, also $b =$

$CH + AH = FC + AO = a - BF + c - BF$, mit-
hin $BF = \frac{a+c-b}{2} = \frac{B}{2}$.

Es ist ferner, wenn EG senkrecht auf a ist $GF = BF - BG = \frac{1}{2} [a+c-b] - \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} [c-b]$. — Ist x der Abstand der Mittelpunkte D und E . so ist:

$$x^2 = [DF - EG]^2 + GF^2 = \rho^2 - 2\rho \cdot EG + EG^2 + GF^2 \\ = \rho^2 - 2\rho \cdot \sqrt{\left[\frac{4r-a^2}{4}\right]} + r^2 - \frac{1}{4} a^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Es ist aber:

$$-\frac{1}{4} a^2 + \frac{(c-b)^2}{4} = -\frac{B \cdot C}{4}, \text{ folgl. } x^2 = r^2 + \rho^2 - \frac{B \cdot C}{4} - \rho \sqrt{4r^2 - a^2},$$

ferner:

$$\rho^2 - \frac{B \cdot C}{4} = -\frac{B \cdot C \cdot a}{2S} a \cdot \rho \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{a}{2S} \sqrt{4b^2 c^2 - S \cdot A \cdot B \cdot C}.$$

Nach §. 82. 2. g. A. ist $4b^2 c^2 - [b^2 + c^2 - a^2]^2 = 16Q^2 =$

$S \cdot A \cdot B \cdot C$ [§. 26.], also $\rho \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{a}{2S} [b^2 + c^2 - a^2]$;

folglich:

$$x^2 = r^2 - \frac{B \cdot C \cdot a}{2S} - \frac{a}{2S} [b^2 + c^2 - a^2] = r^2 - \frac{a}{2S} [B \cdot C + b^2 + c^2 - a^2] \\ = r^2 - \frac{a}{2S} \cdot 2bc = r^2 - \frac{abc}{S}; \text{ es ist aber } r \cdot \rho = \frac{abc}{2S},$$

folglich $x^2 = r^2 - 2r\rho$ und $x = \sqrt{r[r - 2\rho]}$.

§. 84.

Aufgabe. (Fig. 201.) Verlängert man zwey Seiten AB und BC eines Dreyeckes über die dritte hinaus, so gibt es einen Kreis, dessen Mittelpunkt ausserhalb des Dreyeckes liegt, und welcher die dritte Seite und die verlängerten beyden andern tangirt: man soll dessen Halbmesser ρ' finden.

Auflösung. Gesetzt K sey der Mittelpunkt des verlangten Kreises, für welchen die Senkrechten $LK = KN = KM = \rho'$ sind. Es ist $\triangle ALK \cong \triangle AKN$, $\triangle CKM \cong \triangle CKN$ und $\triangle LBK \cong \triangle BKM$, also $AL = AN$, $CM = CN$ und $BL = BM$, oder $c + AN = a + CN$ und $c + 2AN = a + AN + CN = a + b$, daher $AN = \frac{1}{2}[a+b-c] = \frac{1}{2} C$. — Ebenso ist $a = BF + FC = EO + HC = c - AH + b - AH$, woraus $AH = \frac{1}{2}[b+c-a] = \frac{1}{2} A$ ist. Nun ist $o = n$, $H = N = R$, also $\triangle ADH \cong$

$\triangle AKN$, und $AH : DH = KN : AN$, oder $\frac{1}{2} A : \rho = \rho' : \frac{1}{2} C$, also $\rho' = \frac{A.C}{4\rho} = \sqrt{\frac{A.C.S}{4B}}$ [§. 83. g. A.]. Eben so hat man den Radius ρ'' für den Kreis auf der Seite bey a , $\rho'' = \sqrt{\frac{B.C.S}{4A}}$ und den bey c , $\rho''' = \sqrt{\frac{A.B.S}{4C}}$.

Zusatz. Das Product der vier Radien $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ ist $= \frac{1}{16} [A.B.C.S]$, folglich $\sqrt{\rho \cdot \rho' \cdot \rho'' \cdot \rho'''} = \frac{1}{4} \sqrt{A.B.C.S} = \triangle ABC$ [§. 26.].

§. 85.

Aufgaben. 1) Man soll in Fig. 201, die Centrallinie $EK = x'$ finden [§. 84.].

Auflösung. Man fälle EI senkrecht auf AC . Es ist $AN = \frac{1}{2} [a+b+c] = \frac{C}{2}$ [§. 84.], dann $IN = AN - AI = AN - \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} [a-c]$. Es ist, wenn man EI über I verlängert, bis sie die durch $K \parallel AC$ gezogene Linie schneidet, und EK zieht, $EK^2 = [EI + KN]^2 + IN^2 = [\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2} + \rho']^2 + \frac{(a-c)^2}{4}$, oder:

$$x'^2 = r^2 - \frac{1}{4}b^2 + \rho' \sqrt{4r^2 - b^2} + \rho'^2 + \frac{(a-c)^2}{4}. \text{ — Es ist aber } -\frac{1}{4}b^2 + \frac{(a-c)^2}{4} = -\frac{1}{4}AC \text{ und } \rho' \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{b}{2B} \sqrt{4a^2c^2 - A.B.C.S};$$

ferner $4a^2c^2 - [a^2 + c^2 - b^2]^2 = 16Q^2 = A.B.C.S$ [§. 82. 2. analog.], also $\rho' \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2]$,

$$\begin{aligned} x'^2 &= r^2 + \rho'^2 - \frac{1}{4}A.C + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2] \\ &= r^2 + \frac{A.C.S}{4B} - \frac{A.C}{4} + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2] \\ &= r^2 + \frac{b.A.C}{2B} + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2] = r^2 + \frac{b}{2B} [A.C + a^2 + c^2 - b^2] \\ &= r^2 + \frac{b}{2B} . 2ac = r^2 + \frac{abc}{B}, \text{ und da } r\rho' = \frac{abc}{2B} \text{ ist,} \\ &= r^2 + 2r\rho', \text{ also } x' = \sqrt{r[r + 2\rho']}. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man die Centrale zu r und ρ'' , oder

$$x'' = \sqrt{r[r + 2\rho'']} \text{ und die für } r \text{ und } \rho''' \text{ oder } x''' = \sqrt{r[r + 2\rho''']}.$$

2) Man soll in Fig. 201. die Centrale $DK = y'$ finden. [§. 84.]

Auflösung. Es ist $HN = AN - AH = \frac{1}{2}[a + b - c] - \frac{1}{2}[b + c - a] = a - c$, dann $y'^2 = HN^2 + [DH + NK]^2 = HN^2 + [\varrho + \varrho']^2 =$

$$= [a - c]^2 + \frac{A.B.C}{4S} + \frac{A.C.S}{4B} + 2\varrho.\varrho' \quad [\text{§. 83 und 84.}]$$

$$= [a - c]^2 + \frac{A.C}{4BS} [B + S]^2 = \frac{-b^2(a - c)^2 + b^2(a + c)^2}{BS}$$

$$= \frac{4ab^2c}{BS}, \text{ folglich } y' = 2b \sqrt{\frac{ac}{BS}}.$$

Ebenso erhält man die Centrale zwischen den Kreisen mit ϱ und ϱ'' oder $y'' = 2a \sqrt{\frac{bc}{AS}}$ und die zwischen den Kreisen mit ϱ und ϱ''' oder $y''' = 2c \sqrt{\frac{ab}{CS}}$.

§. 86.

Aufgabe. Die Seite des regulären Dreysecks im Kreise, dessen Radius = 1 ist, zu finden.

Auflösung. (Fig. 202.) Es sey $AB = x$ die Seite eines regulären Dreysecks, folglich ist $ADB = 120^\circ$. Man mache $BC = DC = 1$, so wird $BDC = 60^\circ$, also $ADC = 72^\circ$, und es ist die Sehne AC die Seite eines regulären Fünfecks in diesem Kreise, mithin:

$$AC = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = a \quad [\text{§. 33. g. Aufg.}]$$

$$\text{Es ist } AD = \frac{BC.AC.AB}{4\Delta ABC} \quad [\text{§. 63. 1. g. A.}], \text{ also } \Delta ABC = \frac{1}{4}ax.$$

Auch ist:

$$\Delta ABC = \frac{1}{4} \sqrt{[a + 1 + x][a + 1 - x][a + x - 1][1 + x - a]} \quad [\text{§. 26. g. A.}] \text{ also } a^2x^2 = [[a + 1]^2 - x^2][x^2 - [a - 1]^2] \text{ und}$$

$$x^4 - [a^2 + 2]x^2 + [a^2 - 1]^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{[\frac{1}{2}[a^2 + 2] - \sqrt{\frac{1}{4}[a^2 + 2]^2 - [a^2 - 1]^2}]} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{[2a^2 + 4 - 2a\sqrt{12 - 3a^2}]} =$$

$$x = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{2a^2 + 4 + 4[a^2 - 1]}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{2a^2 + 4 - 4[a^2 - 1]}{2}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [a\sqrt{3} - \sqrt{4 - a^2}] \text{ und, da } a = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \text{ ist,}$$

$$= \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{8}} - \frac{1}{4} \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{8}} - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Zusatz. Nach §. 86. *Zus. II. G.* findet man durch gehörige Substitution dieses Werthes von x nach gehöriger Abkürzung die Seite des im Kreise beschriebenen regulären Fünfeckes, oder

$y = \frac{1}{2}[(a^2 - 2)\sqrt{3} + a\sqrt{4 - a^2}] = \frac{1}{4}[\sqrt{3} + \sqrt{10} + 2\sqrt{5} - \sqrt{15}]$,
ferner nach §. 86. *G.* die Seite des regulären Sechseckes, oder

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{\frac{6 - a^2 + \sqrt{12a^2 - 5a^4}}{2}}} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}[4 - a] - \sqrt{\frac{12 - 5a^2}{4}}\right]} = \frac{1}{2}[\sqrt{2 + a} - \sqrt{3}\sqrt{2 - a}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{4}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{4}} - \sqrt{3}\left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{4}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{4}}\right]\right] \\ &= \frac{1}{4}[(1 + \sqrt{3})\sqrt{3 - \sqrt{5}} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}}], \text{ oder auch} \\ &= \frac{1}{4}[(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}})(\sqrt{5} - 1) - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}}]. \end{aligned}$$

Constructions - Aufgaben.

§. 87.

Aufgabe. Es ist ein Dreieck gegeben; man soll ein anderes gegebenes Dreieck so verwandeln, daß es mit dem ersteren ähnlich wird.

Auflösung. (Fig. 203.) Man verwandle das letztere Dreieck in das $\triangle ABC$ so, daß es mit dem ersteren $\triangle AFG$ einen Winkel gemein hat [§. 49. 2. G.]; ziehe $BD \parallel FG$, beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte DK senkrecht auf AC , und mache $AP = AK$, so ist, wenn man $PQ \parallel FG$ zieht, das $\triangle AQP$ das verlangte.

Beweis. Da $PQ \parallel FG$ ist, so ist $\triangle AQP \sim \triangle AFG$. Ferner ist $AD : AK : AC$, also $AD \cdot AC = AK^2 = AP^2$, aber $\triangle AQP : \triangle ABD = AP^2 : AD^2 = AD \cdot AC : AD^2 = AC : AD$,
 $\triangle ABC : \triangle ABD = AC : AD$ [§. 68. G.]

folgl. $\triangle ABC = \triangle AQP$.

§. 88.

Aufgabe. Es ist innerhalb eines Kreises ein Punkt gegeben; man soll durch ihn eine Linie von gegebener Länge als Sehne in den Kreis legen.

Auflösung. (Fig. 204.) Es sey E der gegebene Punct, AB die Sehne. Man trage diese beliebig in den Kreis als Sehne z. B. in CD , fälle vom Mittelpuncte des Kreises I auf CD die Senkrechte IK , und beschreibe damit aus I einen Kreis. An diesen ziehe man von E die Tangente EH , verlängere sie, so ist FG die verlangte Sehne. (Der Beweis ergibt sich, wenn man IL senkrecht auf FG fällt, und findet, daß $IL = IK$ ist [§. 57. Zus. II. G.].)

§. 89.

Aufgabe. (Fig. 205.) Die Summe zweyer Seiten eines Dreyeckes sey a , die dritte b und ihr anliegender Winkel α , man soll das Dreyeck construiren.

Auflösung. Man zeichne $ABC = \alpha$, mache $BD = a$, $BE = b$, ziehe ED , halbire sie in F , und errichte FG darauf senkrecht, so ist, wenn man EG zieht, das $\triangle BEG$ das verlangte.

Beweis. Es ist $GD = EG$ und $BG + EG = BG + GD = BD = a$ etc.

§. 90.

Aufgabe. Es ist die Summe zweyer Seiten a , die dritte b und der ihr gegenüberliegende Winkel α ; man soll das Dreyeck construiren.

Auflösung. (Fig. 206.) Man mache $ABC = \alpha$, $BC = a$, und halbire ABC durch BD , schneide diese aus C mit b in D und E , und ziehe EF oder $DG \parallel AB$, so ist das $\triangle EFC$ oder $\triangle DGC$ das verlangte.

Beweis. Jedes der so eben genannten Dreyecke entspricht der Bedingung der Aufgabe; denn es ist $DC = EC = b$, ferner, da $AB \parallel EF \parallel DG$ ist, $BEF = EBF = \frac{1}{2} \alpha$, also $EF = BF$, $EFC = \alpha$ und $EF + FC = BC = a$; ebenso $BDG = DBG = \frac{1}{2} \alpha$, also $DG = BG$, $DGC = \alpha$ und $DG + GC = BC = a$. Beyde Dreyecke EFC und DGC sind congruent, denn zieht man $ab \parallel BC$, so ist $bED = EDb = \frac{1}{2} \alpha$ und da $DEC = EDC$ ist, auch $bDC = bEC = ECF$, ferner $DC = EC$, $DGC = EFC$, mithin $\triangle DGC \cong \triangle EFC$.

§. 91.

Aufgabe. Es ist die Differenz zweyer Seiten d , der

der kleineren derselben gegenüberliegende Winkel α und die dritte Seite b gegeben; man soll das Dreyeck construiren.

Auflösung. (Fig. 207.) Man trage an $BC = b$ den Winkel $DBC = \alpha$, mache $BD = d$, ziehe DC , errichte auf ihrer Mitte E die Senkrechte EA , verlängere BD bis sie letztere schneidet, und ziehe AC , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Der Beweis ist leicht zu finden.)

I. Zusatz. Soll α der gröfseren Seite gegenüberliegen, so mache man (Fig. 208.) $AB = b$, $BAF = \alpha$, $AD = d$, ziehe DB , errichte auf ihrer Mitte E die Senkrechte EC bis an den Durchschnittspunct C mit DF , ziehe endlich CB , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Auch hier ist der Beweis leicht).

II. Zusatz. Soll α der Seite b gegenüberliegen, so mache man (Fig. 209.) $DC = d$, $GDC = R$, $EDG = \alpha$, halbire α durch FD , durchschneide diese mit b aus C in A , ziehe AC , halbire AD in I , und errichte BI darauf senkrecht bis an den Durchschnitt B der Richtung DC ; endlich ziehe man AB , so ist ABC das verlangte Dreyeck. Denn es ist $IBD + IDB = R = IDB + IDG$, also $IBD = IDG = \frac{1}{2}\alpha$ und $ABC = \alpha$ der Seite $AC = b$ gegenüber. Auch ist $AB = BD$, folglich $d = DC = BC - BD = BC - AB$.

§. 92.

Aufgabe. Es soll ein Dreyeck construirt werden, wovon die Summe zweyer Seiten a , die dritte b , und die Differenz der ihr anliegenden Winkel α ist.

Auflösung. (Fig. 210.) Man mache $AB = b$, $ABD = \alpha$, halbire α durch EB , mache $EBF = R$, durchschneide BF aus A mit a in G , errichte in der Mitte H von BG auf diese HC senkrecht bis sie AG in C schneidet, so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Beweis. Es ist klar, dafs $AB = b$, und, da $CG = CB$ ist, dafs $AC + CB = AC + CG = AG = a$ ist: es ist nur noch zu zeigen, dafs $\beta - \gamma = \alpha$ ist. Der Constr. gemäß ist $CH \parallel EB$, also $BCH = EBC = \frac{1}{2}\alpha + \gamma$ und $BCG = \alpha + 2\gamma = \beta + \gamma$, daher $\alpha = \beta - \gamma$.

§. 93.

Aufgabe. Man soll ein Dreyeck construiren, worin eine Seite a , dann die von ihren Endpuncten auf die beyden andern Seiten gefällten Senkrechten b und c sind.

Auflösung. (Fig. 211.) Man mache $AB = a$, beschreibe darüber einen Halbkreis, mache die Sehne $AB = b$, und die $BE = c$, ziehe DB und AE und verlängere beyde bis zum Durchschnittspuncte C , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Der Beweis ist leicht.)

§. 94.

Aufgabe. Es werde ein Dreyeck construirt, dessen Grundlinie a , Höhe b und der, der Seite a entgegengesetzte, Winkel α werde.

Auflösung. (Fig. 212.) Man mache $AB = a$, $AD = DB$, $EDB = R$, $ED = b$, ziehe durch E die Linie $FG \parallel AB$, mache $BAH = \alpha$, errichte in A auf AH die Senkrechte AI bis sie ED schneidet, beschreibe mit AI einen Kreis, und ziehe von C oder K nach A und B Linien; so ist ABC das gesuchte Dreyeck.

Beweis. $AB = a$ ist Grundlinie und $ED = b$ die Höhe des Dreyeckes, dann $ACB = BAH = \alpha$. [§. 59. Geom.]

§. 95.

Aufgabe. Man construire das Dreyeck, welches die Seite a , die dazu gehörige Höhe b , und noch eine der beyden andern Höhen $= c$ hat.

Auflösung. (Fig. 213.) Man mache $AB = a$, $ABD = R$, $BD = b$, ziehe $DE \parallel AB$, beschreibe über AB einen Halbkreis, trage darein, von A aus, $AF = c$ als Sehne, ziehe BF bis C und dann AC , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Der Beweis hat keine Schwierigkeit.)

§. 96.

Aufgabe. Es werde ein Dreyeck construirt, bey welchem α ein Winkel, a die Höhe auf einem seiner Schenkel und b die Höhe aus dem Scheitel von α auf die Gegenseite ist.

Beweis. (Fig. 214.) Es sey $ABD = \alpha$; man mache $EBD = R$, $EB = a$, ziehe durch E , $EA \parallel BD$, be-

schreibe über AB einen Halbkreis, und durchschneide diesen aus B mit $BF = b$; ziehe endlich AF bis C , dann ist $\triangle ABC$ das verlangte. (Der Beweis ist leicht.)

§. 97.

Aufgabe. Man construire ein Dreyeck, bey welchem die Summe zweyer Seiten a , die Höhen auf diese beyden b und c sind. [§. 69. g. A.]

Auflösung. (Fig. 191.) Man mache $AB = b$, $BC = c$, $EAC = R$, schneide AE aus C mit a in D , ziehe $DC = a$, mache $DCF = R$ und $FC = c$, ziehe $GF \parallel DC$, so entsteht der Durchschnittspunct G ; errichte endlich HB in B senkrecht auf AC , so entsteht ein Durchschnitt in H , und es ist, wenn man GH zieht, das $\triangle DGH$ das verlangte.

Beweis. Man fälle GI und HK senkrecht auf DH und DG , so ist $GI = FC = c$ und $HK = AB = b$. Es ist ferner $GDI = BHC$, $GI = FC = BC = c$ und $I = B = R$, folglich $\triangle GDI \cong \triangle HBC$, also $GD = HC$, und $GD + DH = HC + DH = DC = a$.

§. 98.

Aufgabe. Es werde ein Dreyeck mit den beyden Winkeln α und β construirt, dessen Umfang a ist.

Auflösung. (Fig. 215.) Man mache $MN = a$, $OMN = \alpha$, $PNM = \beta$, halbire diese beyden Winkel, durch den Durchschnittspunct A ziehe man $AB \parallel OM$ und $AC \parallel PN$, so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Der Beweis ist leicht.)

§. 99.

Aufgabe. Es werde ein Dreyeck construirt, bei welchem die Summe der Seiten a , ein Winkel α , und eine von den beyden diesem Winkel gegenüberliegenden Höhen b ist.

Auflösung. (Fig. 216.) Man mache $MN = a$, $MNO = R$, $ON = b$, $OP \parallel MN$, $MNQ = \alpha$, $ANQ = ANM = \frac{1}{2} \alpha$, ziehe AM , dann $AB \parallel QN$, mache $AD = DM$ und $ADC = R$, und ziehe AC , so ist ABC das Dreyeck. (Der Beweis hat keine Schwierigkeit.)

Zusatz. Soll eine Höhe b durch die Winkelspitze

von α gehen, und ist α die Summe der Seiten, so mache man (Fig. 217.) $MN = a$, $MNO = R$, $NO = b$, $PO \parallel MN$, $NMU = \frac{1}{2} \alpha$, $MD = DN$, $MDU = R$, beschreibe aus U mit UM einen Kreisbogen, ziehe AM und AN , halbire diese in G und F , und errichte darauf die Senkrechten GB und FC ; ziehe endlich AB und AC , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Beweis.) Dafs $ON = b$ die Höhe von A auf BC ist, ist klar, ebenso dafs $AB + BC + AC = MB + BC + CN = a$ ist. Um zu zeigen, dafs $BAC = \alpha$ ist, ziehe man AU , so ist, da $AU = MU$ ist, $MAU = AMU$, ebenso $BAM = AMB$, folglich $MAU - BAM = AMU - AMB$, oder $BAU = BMU = \frac{1}{2} \alpha$. Ebenso ergibt sich, dafs $CAU = \frac{1}{2} \alpha$ ist, also $BAC = \alpha$.

§. 100.

Aufgabe. Man soll ein Viereck construiren, bey welchem drey Seiten a , b , c und zwey einander gegenüberliegende Winkel α und β sind.

Auflösung. Mit a , b und dem eingeschlossenen Winkel α zeichne man ein Dreyeck; mit der erhaltenen dritten Seite desselben und mit c und β ebenfalls ein anderes Dreyeck, in welchem aber β der dritten Seite des ersten Dreyeckes gegenübersteht, und setze beyde Dreyecke mit dieser Seite zusammen.

§. 101.

Aufgabe. Man construire ein Viereck, welches die drey Winkel α , β , γ und als zwey gegenüberstehende Seiten a und b hat.

Auflösung. (Fig. 218.) Man mache $AB = a$, zeichne daran α und β , setze an den Schenkel AF in irgend einem Punkte z. B. F den Winkel γ an, mache $FE = b$, $CE \parallel AF$ und durch den Durchschnittspunct C , $CD \parallel FE$, so ist auch $ADC = \gamma$ und $DC = FE = b$, also BD das verlangte Viereck.

§. 102.

Aufgabe. Man construire ein Viereck, bey welchem a , b , c , drey Seiten, und α und β die zwey an der vierten Seite anliegenden Winkel sind.

Auflösung. (Fig. 219.) Man trage an die Endpuncte

einer beliebigen Linie AN die Winkel α und β an, mache $AB = a$, $NP = c$, $QP \nparallel AN$, durchschneide mit b aus B die Linie QP in C , ziehe BC und dann $CD \nparallel NP$; so ist BD das verlangte Viereck. (Der Beweis ist leicht.)

§. 103.

Aufgabe. Es werde ein Viereck construirt, bey welchem a , b zwey Seiten, und α der eingeschlossene Winkel, dann β und γ jene zwey Winkel sind, welche die durch den Scheitel von α gehende Diagonale an der gegenüberstehenden Ecke bildet.

Auflösung. (Fig. 220.) Man mache $AB = a$, $ABC = \alpha$, $BC = b$, ziehe AC , mache ferner $ACE = \beta$, $CAE = \gamma$, beschreibe durch A , E und C einen Kreis, ziehe von E durch B die Linie ED , dann AD und DC , so ist $ABCD$ das verlangte Viereck. Denn es ist $ADE = ACE = \beta$ und $EDC = CAE = \gamma$.

§. 104.

Aufgabe. (Fig. 221.) Es ist ein rechter Winkel ABC und in seinem Schenkel ein Punct D gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, welcher CB tangirt, durch den Punct D geht und zwar so, daß die Tangente des Kreises in D mit BD einen gegebenen Winkel α bilde.

Auflösung. Man trage an DB den Winkel $EDB = \alpha$, mache $EF = ED$, und errichte auf diesen beyden Linien in F und D Senkrechte; ihr Durchschnittspunct G ist dann der Mittelpunkt und GF und GD sind die Radien des Kreises.

Beweis. Man ziehe GE , so ist $\triangle GEF \cong \triangle GED$ [§. 30. Zus. II. G.], also $GF = GD$. Weil $GFB = R$ ist, so ist FB eine Tangente. Daß EDB der verlangte Winkel ist, erhellet aus der Construction.

Stereometrische Aufgaben.

§. 105.

Aufgabe. Eines senkrechten Kegels Radius r und Höhe h ist gegeben; man soll den Radius x eines Cylin-

ders mit der Höhe m finden, dessen krumme Seitenfläche der des Kegels gleicht.

Auflösung. Es ist die krumme Seitenfläche des Cylinders $= 2x\pi m$ und die des Kegels $= r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$ [§. 128. Zus.], daher $2x\pi m = r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$, woraus $x = \frac{r}{2m} \sqrt{h^2 + r^2}$.

Zusatz. Für den Fall, daß der Radius y eines Kegels mit der Höhe h , dessen krumme Seitenfläche mit der eines Cylinders mit der Höhe m und dem Radius ρ gleich ist, gesucht werden soll, ist:

$$2\rho\pi m = y\pi\sqrt{h^2 + y^2}, \text{ folglich}$$

$$y = \sqrt{-\frac{1}{2}h^2 + \sqrt{4\rho^2 m^2 + \frac{1}{4}h^4}}.$$

§. 106.

Aufgabe. Der Radius einer Kugel ist r ; man soll den Radius x eines Kegels mit der Höhe h finden, dessen krumme Seitenfläche der Oberfläche der Kugel gleicht.

Auflösung. Es ist die Oberfläche der Kugel $4r^2\pi$ und die krumme Fläche des Kegels $x\pi\sqrt{h^2 + x^2}$; also $4r^2\pi = x\pi\sqrt{h^2 + x^2}$, woraus

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}h^2 + \sqrt{16r^4 + \frac{1}{4}h^4}} \text{ ist.}$$

§. 107.

Aufgabe. Einer Kugel Radius sey R ; man soll den Radius x der obern Grundfläche eines abgekürzten Kegels finden, dessen Höhe h und Radius der untern Grundfläche r ist, und welcher am körperlichen Inhalte obiger Kugel gleicht.

Auflösung. Es ist der Inhalt des abgekürzten Kegels $= \frac{1}{3}\pi h [r^2 + rx + x^2]$ und der der Kugel $= \frac{4}{3}R^3\pi$. Daher $\frac{1}{3}\pi h [r^2 + rx + x^2] = \frac{4}{3}R^3\pi$, woraus:

$$x = -\frac{1}{2}r + \sqrt{\left(\frac{4R^3}{h} - \frac{5}{4}r^2\right)}.$$

§. 108.

Aufgabe. Man soll einen gegebenen Kegel durch eine Ebene, parallel zur Grundfläche, so theilen, daß der oben abgeschnittene Kegel den Inhalt m erhalte, wie groß ist die Höhe des letzteren zu nehmen?

Auflösung. (Fig. 124.) bc sey $[\# BC]$ der Durchschnitt, $Ad = x$, dann $AD = h$, $DC = r$, so ist Kegel ABC $\propto$ Kegel Abc [§. 147. Zus. III.]; folglich

$$ABC : Abc = h^3 : x^3 \text{ [§. 148. Zus. III.], oder}$$

$$\frac{1}{8} r^2 \pi h : m = h^3 : x^3, \text{ woraus } x = \sqrt[3]{\frac{3h^2 m}{r^2 \pi}} \text{ ist.}$$

§. 109.

Aufgabe. (Fig. 151.) Den körperlichen Inhalt eines dreyseitigen [senkrechten oder schiefen] Prisma $LMROPQ$ zu finden, von welchem oben ein Stück von irgend einer zur Grundfläche nicht parallelen Ebene LMR abgeschnitten ist, wenn die drey Kanten $LO = a$, $MP = b$ und $RQ = c$, dann der Inhalt des auf obige Kanten senkrechten Durchschnittes $\triangle ABC = m$ gegeben ist.

Auflösung. Man lege durch L , B und C , dann durch O , B und C Ebenen, so zerfällt das ganze Prisma in vier Pyramiden, wovon zwey ($BCRML$ und $BCQPO$) vierseitig, und die anderen zwey ($ABCL$ und $ABCO$) dreyseitig sind. Man fälle AD senkrecht auf BC , so muß AD auch auf $MRQP$ senkrecht stehen, folglich die Höhe der beyden vierseitigen Pyramiden vorstellen, deren Grundflächen die Trapeze $BCRM$ und $BCQP$ sind. Es ist daher

$$\begin{aligned} LMROPQ &= BCRML + BCQPO + ABCL + ABCO \\ &= \frac{1}{8} AD \cdot BC \frac{1}{2} [BM + CR] + \frac{1}{8} AD \cdot BC \frac{1}{2} [BP + CQ] + \frac{1}{6} m \cdot AL + \frac{1}{6} m \cdot AO \\ &= \frac{1}{8} AD \cdot BC \cdot \frac{1}{2} [BM + CR + BP + CQ] + \frac{1}{6} m [AL + AO] \\ &= \frac{1}{8} m \cdot [b + c] + \frac{1}{6} m \cdot a = m \frac{1}{6} [a + b + c]. \end{aligned}$$

I. Zusatz. Ein mehrseitiges schief abgeschnittenes Prisma kann in dreyseitige zerlegt, dann der Inhalt dieser letzteren, also zuletzt auch der Gesamteinhalt gefunden werden.

II. Zusatz. Der Inhalt einer schief abgekürzten Pyramide wird gefunden, wenn man die Ergänzungs-Pyramide findet, dann den Inhalt dieser von dem Inhalte der ganzen Pyramide abzieht.

§. 110.

Aufgabe. (Fig. 118.) Der Diameter einer Kugel sey d ; man soll die Seite $AB = x$ des in ihr construirten Cubus finden.

Auflösung. Ist AH ein in einer Kugel construirter

Cubus, so müssen alle seine Ecken die Oberfläche der Kugel berühren, und CF der Diameter d der Kugel seyn. Es ist:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CD^2 + BD^2 + BF^2, \text{ oder } d^2 = 3x^2, \text{ also } x = d\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}d\sqrt{3}.$$

Es verhält sich daher auch die Seite des Kubus zum Diameter der Kugel wie $\frac{1}{3}d\sqrt{3} : d$ oder $1 : \sqrt{3}$.

§. 111.

Aufgabe. Der Diameter einer Kugel ist d ; man soll die Seite x eines in derselben beschriebenen Tetraëders finden.

Auflösung. (Fig. 222.) $ABCD$ sey das Tetraëder und jede seiner Seiten $= x$. Man fälle $AG = d$ senkrecht auf die Ebene BDC , so ist die Mitte E von AG der Mittelpunkt der Kugel und F der des Kreises um das gleichseitige $\triangle BDC$, dessen Radius $FC = \sqrt{\frac{x^2}{3}}$ [§. 29. 1. g. A.] ist. — Man setze $AF = z$, so ist $FG = d - z$, und, da $AFC = R$ ist, $AF^2 = AC^2 - FC^2$, oder $z^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$ und $z = \sqrt{\frac{2}{3}}x^2$.

Ferner ist:

$AF : FC : FG$ [§. 80. Zus. II.] oder $z : \sqrt{\frac{x^2}{3}} : d - z$, also $dz - z^2 = \frac{x^2}{3}$, oder $dz - \frac{2}{3}x^2 = \frac{x^2}{3}$, folglich $dz = x^2$, oder $d\sqrt{\frac{2}{3}}x^2 = x^2$, woraus $x = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist.

Zusatz. Es verhält sich der Diameter der Kugel zur Seite des Tetraëders wie

$$d : d\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

§. 112.

Aufgabe. Aus dem Diameter d der Kugel die Seite des darin beschriebenen Octaëders zu finden.

Auflösung. (Fig. 223.) $AGDFEC$ sey das Octaëder und jede seiner Seiten $= x$. Man fälle $AF = d$ senkrecht auf DE und ziehe BC , so ist $AB = BC = \frac{1}{2}d$ und $ABC = R$, folglich $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ oder $x = \sqrt{\frac{1}{2}d^2} = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$.

Zusatz. Es verhält sich der Diameter der Kugel zur Seite des Octaëders, wie $d : \frac{1}{2} d \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$.

§. 113.

Aufgabe. Aus dem Diameter d einer Kugel die Seite des darin construirten Ikosaëders zu finden.

Auflösung. (Fig. 224.) Es sey $AECD$ das Ikosaëdron, x seine Seite, M der Mittelpunkt der darum beschriebenen Kugel, also AC die Achse derselben. Man lege durch $ELDGF$ eine Ebene, so entsteht das reguläre Fünfeck $ELDGF$, dessen Seite $= x$ ist, und auf dessen Mitte B die Achse AC der Kugel senkrecht steht. Man ziehe BD , so ist diese Linie der Radius des um das reguläre Fünfeck beschriebenen Kreises, also $BD = x \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$ [§. 33.

geom. A.]. Es sey $AB = y$, so ist: $AB : AD : AC$ [§. 80.

Zus. I.], oder $y : x : d$, also $y = \frac{x^2}{d}$; ferner, da ABD

$= R$ ist, $AD^2 = BD^2 + AB^2$, oder $x^2 = \frac{2x^2}{5 - \sqrt{5}} + \frac{x^4}{d^2}$,

woraus $x = d \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$.

Zusatz. Der Diameter der Kugel verhält sich zur Seite des Ikosaëders, wie $d : d \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} =$

$$= 1 : \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}, \text{ oder } = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} : 1.$$

§. 114.

Aufgabe. Man soll aus dem Diameter d einer Kugel die Seite des darin beschriebenen Dodekaëders finden.

Auflösung. (Fig. 225.) Es sey ZDC das Dodekaëder, x seine Seite und A der Mittelpunkt der Kugel, so wie $SG = d$ ihre Achse, senkrecht auf der Seiten-Fläche $DEFCY$. Man lege parallel zu zwey Seiten-Flächen $DEFCY$ und $TZUWV$ durch A eine Ebene, so schneidet diese alle übrigen zehn Fünfecke immer in der Mitte zweyer Seiten. Die dadurch entstehende Durchschnits-Figur ist daher ein reguläres Zehneck $HKLMNIOPQR$, dessen Seite der halben Diagonale der begrenzenden Fünfecke des Dodekaëders gleicht. — Man ziehe BC , so ist

diese Linie Radius des um das Fünfeck beschriebenen Kreises; daher

$$BC = x \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}} \text{ [§. 33. g. A.]}$$

Die halbe Diagonale des Fünfeckes, oder eine Seite des regulären Zehneckes $S = \frac{x}{2} \sqrt{4BC^2 - x^2}$ [§. 86.

$$\begin{aligned} \text{Zus. II.}] &= \frac{x}{2} \sqrt{4 - \frac{x^2}{BC^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{4 - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}. \text{ Der Radius für dieses reguläre Zehn-} \\ &\text{eck, dessen Seite } S \text{ ist, oder } R = \frac{S}{2} [\sqrt{5} + 1] \text{ [§. 31. g. A.} \\ &= \frac{x}{4} [3 + \sqrt{5}]. \end{aligned}$$

Man ziehe AX nach der Mitte von DY und dann XB und BY , so ist auch $AX = R$ und, da $BXY = 90^\circ$ ist,

$$XB = \sqrt{BY^2 - XY^2} = \sqrt{BC^2 - \frac{1}{4}x^2} = x \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}$$

also, indem $ABX = 90^\circ$, $AB = \sqrt{AX^2 - XB^2} =$

$$= \sqrt{R^2 - XB^2} = x \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}.$$

Es ist $SB = \frac{1}{2}d + AB$, also $BG = \frac{1}{2}d - AB$; ferner $SB : BC : BG$ [§. 80. Zus. II.], also $BC^2 = SB \cdot BG$

oder $\frac{2x^2}{5 - \sqrt{5}} = \frac{1}{4}d^2 - \frac{x^2}{40} [25 + 11\sqrt{5}]$, woraus

$$x = d \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} \text{ ist.}$$

§. 115.

Aufgabe. Aus der Seite a eines Tetraëders dessen körperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung. (Fig. 222.) Man fälle AF senkrecht auf BDC , und ziehe FC , so ist $FC = \sqrt{\frac{a^2}{5}}$ [§. 29. 1. g. A.],

$$\text{dann } AF = \sqrt{AC^2 - FC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = a \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Der Inhalt des Dreyeckes $BDC = \frac{1}{4}a^2 \sqrt{3}$ [§. 26. Zus. II.];

folglich das Tetraëder $= \frac{1}{3} \triangle BDC \cdot AF$ [§. 154.] =

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$$

§. 116.

Aufgabe. Aus der Seite a des Octaëders dessen körperlichen Inhalt finden.

Auflösung. (Fig. 223.) Man fälle AB senkrecht auf die Ebene DE und ziehe BC , so ist $AB = BC = \sqrt{\frac{1}{2} AC^2} = a \sqrt{\frac{1}{2}}$; ferner $DE = a^2$ und $ADCEG = \frac{1}{3} DE \cdot AB = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$ und $ADCEGF = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.

§. 117.

Aufgabe. Aus der Seite a des Ikosaëders dessen körperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung. (Fig. 224.) Das Ikosaëder besteht aus zwanzig Pyramiden, welche mit der Spitze im Mittelpuncte der darum beschriebenen Kugel zusammenstoßen, und deren Grundfläche eine Seitenfläche des Ikosaëders ist. Eine solche Pyramide ist $AMGD$. Man fälle MN senkrecht auf AGD , und ziehe NG ; so ist $MG = AM$, $BD =$

$a \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$ [§. 112. g. A.], ferner $AD = a$, also $AB =$

$\sqrt{a^2 - BD^2} = a \sqrt{1 - \frac{2}{5 - \sqrt{5}}} = a \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$, dann

$AB : AD : AC$ oder $AB : a : 2MG$, woraus $MG = \frac{a}{2AB} =$

$= \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}$, endlich $NG = a \sqrt{\frac{1}{3}}$ [§. 29. 1. g. A.],

mithin die Höhe der Pyramide, oder

$MN \sqrt{MG^2 - GN^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{4} a^2 \frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} - \frac{a^2}{3} \right]} =$

$= a \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{12 [3 - \sqrt{5}]}} = \frac{a [3 + \sqrt{5}]}{4 \sqrt{3}}$. Die Grundfläche

$AGD = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ [§. 26. Zus. II. g. A.], folglich das Ikosaëder selbst, oder $Q = 20$. $AMGD =$

$= 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4 \sqrt{3}} = \frac{5}{12} a^3 [3 + \sqrt{5}]$.

§. 118.

Aufgabe. Aus der Seite a eines Dodekaëders dessen körperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung. (Fig. 225.) Das Dodekaëder besteht aus zwölf Pyramiden $ADEFCY$, deren Grundfläche

$$DEFCY = m = \frac{5}{4} a \sqrt{4BC^2 - a^2} \text{ [§. 99. Geom.]}$$

$$\text{ist, und, da } BC^2 = \frac{2a^2}{5 - \sqrt{5}} = a^2 \frac{10 + 2\sqrt{5}}{20} \text{ [§. 33. g. A.]}$$

$$\begin{aligned} \text{ist, auch } m &= \frac{5}{4} a^2 \sqrt{\left[\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5} - 1 \right]} = \\ &= \frac{5}{4} a^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}. \end{aligned}$$

$$\text{Es ist ferner } AB = a \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \text{ [§. 113. g. A.],}$$

$$\begin{aligned} \text{folglich das Dodekaëder, oder } Q &= 12 \cdot \frac{1}{3} m \cdot AB = \\ &= 4m AB = 5a^3 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} = \\ &= \frac{5}{2} a^3 \sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}} = \frac{5}{2} a^3 \frac{15 + 7\sqrt{5}}{10} = \\ &= \frac{1}{4} a^3 [15 + 7\sqrt{5}]. \end{aligned}$$

Gemischte Aufgaben zur Selbstübung.

1) Die drey Seiten eines Dreyeckes ABC sind $BC = a = 36'$, $AC = b = 40'$ und $AB = c = 45'$; man soll die Grundlinie und Höhe eines Rechteckes finden, welches mit diesem Dreyecke gleichen Umfang und gleiche Fläche hat.

2) Die Fläche eines Rechteckes hält $100 \square'$; wie groß ist dessen Grundlinie und Höhe, wenn das Rechteck so beschaffen ist, dass seine Hälfte [welche durch die Verbindungslinie der Halbierungspunkte der beyden gegenüberstehenden größeren Seiten des Rechteckes entsteht] mit dem ganzen ähnlich ist?

3) Wie schwer wiegt 1 pariser Cubicfuß destillirten Wassers im Parisergewichte, wenn 1 bayer. Cubicfuß nach bayer. Gewichte 44 Pfund 11 Loth 3,36 Quintel wiegt, und bekannt ist, dass 1000 Pariserfuß 1113 bayerische Fuß, und 100 bayerische Pfund 114,66 Pariserpfunde geben?

4) Wie schwer drückt eine 60pfündige eiserne Kugel auf den Boden eines mit destillirten Wasser gefüllten Gefäßes, wenn das specifische Gewicht des Eisens 7,113 ist?

5) Bey einem geraden Kegel verhält sich der Diameter der Grundfläche zur Höhe wie 2 zu 3, wie groß ist der Winkel des Kreisausschnittes, welchen die krumme Seitenfläche des Kegels bildet?

6) Wie groß ist der Diameter und die Höhe des Kegels in der vorhergehenden Aufgabe, wenn die ganze Oberfläche des Kegels $1\text{ }^{\circ} 88\text{ }'\text{ }9\text{ }''$ Duodecimalmaß ist?

7) Ein Cubicfuß Bley wiegt 502,6 Pfund; wie groß ist die Kante einer, einen Zentner schweren, vierseitigen Pyramide aus Bley, wenn alle Kanten derselben unter sich gleich sind?

8) Die Diagonale eines Würfels ist $2'\text{ }11'''$ (Duodecimalmaß); wie groß ist dessen Oberfläche und körperlicher Inhalt?

9) Man soll den Zwischenraum zwischen drey sich berührenden gleich großen Kreisen finden, wenn der Radius der Kreise $8''\text{ }9'''$ beträgt.

10) Um ein Tetraëder ist eine Kugel beschrieben; man suche 1) den körperlichen Inhalt und 2) die Oberfläche dieses Tetraëders, wenn der Kugeldurchmesser $d = 3'\text{ }7''$ (Duodecimalmaß) ist.

11) In einem gleichschenkligen Trapeze, dessen eine Parallele $a = 8''\text{ }5'''$ und andere $b = 1'\text{ }9''$ mißt, ist ein Kreis so beschrieben, daß er alle vier Seiten desselben berührt; wie groß ist der Radius dieses Kreises?

12) Man soll ein Dreyeck durch eine Parallele zur Grundlinie halbiren; wie kann dieß durch Construction geschehen?

13) Es sollen 6 metallene Kugeln, deren Durchmesser $1'\text{ }4''$, $2'\text{ }3''$, $3'\text{ }8'''$, $4'\text{ }1''$, $5'$ und $5'\text{ }7''$ sind, in eine große Kugel umgegossen und letztere vergoldet werden; wie viel Gold braucht man dazu, wenn auf 1 ° ein halbes Quintel kömmt?

14) Wenn man über die drey Seiten eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen eine Kathete $3'$ und andere $4'$ mißt, Halbkreise beschreibt, so entstehen über den Katheten zwey Halbmonde; wie groß ist die Fläche beyder zusammen genommen?

15) Die Fläche eines rechtwinkligen Dreyeckes sey f ,

dessen Umfang p , man soll die drey Seiten dieses Dreyeckes finden.

16) Die Summe und die Differenz der beyden Katheten eines rechtwinkligen Dreyeckes ist $S = 2' 7'' 3'''$ und $D = 8'' 9'''$; man suche die Hypotenuse.

17) Die Hypotenuse $a = 4' 5''$ und die Summe $S = 6' 3''$ der beyden Katheten ist gegeben, man suche die Katheten selbst.

18) In einem rechtwinkligen Dreyecke ist die Fläche f und das Verhältniß der beyden Katheten $\frac{b}{c} = m$ gegeben, man suche die drey Seiten, a, b, c dieses Dreyeckes.

19) Ein Cubicfuß Bley wiegt 502,6 Pfund, wie groß ist der Durchmesser einer 80pfündigen Kugel, und in welchem Verhältnisse steht dieser zu dem einer 2 Zentner schweren aus demselben Metalle?

20) Die Oberflächen zweyer Kugeln verhalten sich wie $m : n$, in welchem Verhältnisse stehen ihre körperlichen Inhalte?

21) Man hat zwey gleich schwere Kugeln, die eine von Kupfer die andere von Zinn; in welchem Verhältnisse stehen ihre Durchmesser, wenn $k = 8,895$ und $z = 7,264$ die specifischen Gewichte beyder Metalle sind?

22) Es ist bekannt, daß der Diameter einer 3pfündigen Kugel von Bley dem Diameter einer 2pfündigen von Eisen und dem einer 18löthigen von Stein gleicht; was würde demnach eine 12pfündige eiserne Kugel wiegen, wenn sie von Bley wäre, und was eine 8pfündige steinerne, wenn sie von Eisen wäre?

23) Ein Bild, von viereckiger Form, dessen Länge $3' 6''$ und Breite $2' 4''$ beträgt, ist mit einem überall gleichbreiten Rahmen umgeben, dessen Fläche sich zur Fläche des Bildes wie $17 : 27$ verhält. Wie breit ist dieser Rahmen?

24) Im $\triangle ABC$ ist $BC = a = 15'$, $AC = b = 12'$, dann $DC = m = 9'$ die Entfernung des Punctes D , in der Seite BC , von C . Man soll von D aus das Dreyeck durch eine gerade Linie halbiren, wo d. i. wie weit von C , in der Seite AC , wird die Halbirungslinie eintreffen?

25) Der körperliche Inhalt eines Cylinders beträgt $10^c 110^c'' 19^c'''$ (Duodecimalmaß), die Peripherie der Grund-

Fläche verhält sich zur Höhe wie $7 : 3$; wie groß ist der Durchmesser und die Höhe dieses Cylinders?

26) Die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks verhalten sich wie $3, 7$ und 9 ; in welchem Verhältnisse steht der Radius des darin — zu dem des darum beschriebenen Kreises?

27) Bey einer Gartenanlage, welche die Form eines regulären Achtecks hat, ist die größte Diagonale $d = 14^{\circ} 9'$; wie groß ist der Umfang und die Fläche dieses Gartens?

28) Im $\triangle ABC$ ist $BC = a = 11'$, der Abstand der von A auf BC gefällten, Höhe AD vom Punkte C , nämlich $DC = m = 5'$; man soll von diesem Dreieck durch eine Senkrechte auf BC gegen C zu ein Stück abschneiden, welches $p = \frac{2}{5}$ des ganzen beträgt. Wie weit von C muß die Senkrechte errichtet werden?

29) Zum Vergolden von vier Kugeln brauchte man 8 Loth und 0,97 Quintel Gold, so daß auf einen Quadratzoll ein halbes Quintel traf. Der Durchmesser der zweyten Kugel ist um einen Zoll, der der dritten um $2''$ und der der vierten um $3''$ größer als der der ersten; wie groß ist jeder dieser Durchmesser, und wie viel Gold brauchte man zu jeder dieser Kugeln?

30) Wie groß ist der Durchmesser einer concentrisch-hohlen Kugel von Gufseisen, bey welcher die Eisenstärke rings $a = 7''' 2''''$ (Duodecimalmaß) ist, wenn sie einen Zentner und 12 Pfund (b) wiegt, und wenn bekannt ist, daß ein Cubicfuß Wasser 44,37 Pfund und das Gufseisen $7\frac{1}{2}$ mal so schwer als Wasser wiegt?

31) Wie viel an Gewicht faßt die Kammer einer 16pfündigen Haubitze, wenn die Länge der Kammer [den halbkugelförmigen Schluß mitgerechnet] $1\frac{1}{2}$ und ihr Durchmesser $\frac{1}{2}$ Granaten-Durchmesser, dann der einpfündige Granaten-Durchmesser $3,224''$ beträgt, übrigens $38\frac{1}{2}''$ Pulver ein Pfund wiegen?

32) Der Cubicinhalt eines geraden Kegels hält $236'$; wie groß ist die schiefe Seite dieses Kegels, wenn der Winkel des Sectors, welchen die krumme Seitenfläche dieses Kegels bildet, $193^{\circ} 12'$ beträgt?

33) Zwischen den Schenkeln eines Winkels von 60° ist ein Kreis beschrieben, welcher beyde Schenkel in einer Entfernung von $3' 6''$ vom Scheitel berührt; man suche den Radius dieses Kreises und die Entfernung des Mittelpunctes vom Scheitel.

34) Die Grundlinie $a = 3' 5''$ und die Höhe $h = 2' 8'''$ eines Dreyeckes ist gegeben. Wie groß ist die Grundlinie und Höhe eines Rechteckes, dessen Grundlinie auf der des Dreyeckes liegt, und dessen obere Ecken die beyden andern Seiten des Dreyeckes berühren, wenn sich die Grundlinie und Höhe des Rechteckes wie $1 : n$ (wobey $n = 3$) verhalten soll?

35) Man suche das Verhältniß des Radius des in einem regulären Sechsecke beschriebenen Kreises zu dem des darum beschriebenen.

36) Wie schwer wiegt ein $5'$ langer hohler Cylinder von Gufseisen, dessen Durchmesser im Lichten $1' 5''$ und Eisenstärke $1'' 5'''$ (Duodecimalmaß) beträgt, wenn ein Cubicfuß Wasser $44,37$ Pfund wiegt, und das Gufseisen $7\frac{1}{2}$ Mahl so schwer als Wasser ist?

37) In einem rechtwinkligen Dreyecke ist über der größern Kathete ein Halbkreis so beschrieben, daß er den Scheitel des rechten Winkels durchschneidet und die Hypotenuse berührt. Beyde Flächen, um die größere Kathete bewegt, bilden die eine einen Kegel die andere eine Kugel. In welchem Verhältnisse stehen die Oberflächen und in welchem die körperlichen Inhalte beyder Körper, wenn der Radius des Halbkreises $r [= 2'' 4''']$ und die größere Kathete um $n [= 2']$ länger ist als der Durchmesser?

38) Es sey A die ganze Oberfläche eines geraden Kegels, b die Fläche der, von der Spitze um h entfernten, zur Grundfläche parallelen Durchschnits-Figur. Man suche den Radius der Grundfläche und die Höhe des ganzen Kegels.

39) Der Umfang eines Quadranten ist $p [= 1' 2']$, wie groß ist dessen Fläche?

40) Der körperliche Inhalt eines Kugel-Segmentes ist gerade so groß, als der des Kegels, der ersteres zum centralen Kugel-Sector ergänzt. Man suche die Höhe des

Segments, wenn der Kugel-Radius $R [= 1' 5'' 11'''$ Duodecimalmafs) ist.

41) Ein 2 Pfund schweres cylindrisches Gefäß, dessen Durchmesser im Lichten $1' 2''$ und dessen Tiefe $2'$ (Duodecimalmafs) ist, ist ganz mit Wasser angefüllt. In dasselbe wird eine eiserne Kugel, im Durchmesser $8''$, versenkt, so, daß das, durch die Kugel verdrängte, Wasser überfließt. Wie schwer wiegt nun das Ganze nach bayer. Gewichte, wenn ein bayer. Cubicfuß Wasser 44,37 bayer. Pfunde und das specifische Gewicht obigen Eisens 7,113 ist?

42) In welchem Verhältnisse stehen die Oberflächen der 25 und 80 pfündigen Kugel von derselben Masse, die Oberfläche der ersteren als Einheit angenommen?

43) Es soll eine Pyramide durch zwey, zur Grundfläche parallele, Ebenen in drey gleiche Theile getheilt werden. In welchem Verhältnisse stehen die drey zu den Theilen gehörigen Stücke einer Seitenkante?

44) Es sey $a [= 1' 3'']$ ein Schenkel, $b [= 8'']$ die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyeckes; man suche den Radius des darum beschriebenen Kreises.

45) In ein Quadrat, dessen Seite $a [= 2']$ ist, soll ein kleineres $n [= \frac{2}{3}]$ Mal so großes so construirt werden, daß die vier Ecken des letztern in die vier Seiten des erstern fallen; wie groß ist der Abstand je zweyer Ecken dieser Quadrate? Wie findet man diesen Abstand durch Construction aus der Seite a ?

46) Man soll ein Dreyeck durch Construction, parallel zur Grundlinie, in fünf gleiche Theile theilen.

47) Man suche einen Schenkel des gleichschenkligen Dreyeckes, dessen Grundlinie $b [= 5' 2'']$ ist, wenn der Radius des darin beschriebenen Kreises $r [= 8'' 4''']$ mißt.

48) Man soll den Inhalt des Raumes finden, den ein inwendig nach verschiedenen Formen ausgearbeitetes Gefäß in sich faßt. Mit destillirtem Wasser angefüllt enthält dieses Gefäß einen Gewichts-Zuwachs von 99 bayer. Pfunden. Es ist bekannt daß ein bayer. Cubicfuß destillirten Wassers 44,37 bayer. Pfund wiegt.

49) Eine aus Gufseisen künstlich ausgearbeitete Figur wird in ein cylindrisches, zum Theil mit Wasser gefülltes

Gefäß, dessen Durchmesser im Lichten $3' 4'' 8'''$ (Duodecimalmafs) hält, so versenkt, dafs sie ganz unter Wasser steht. Wie grofs ist der körperliche Inhalt dieser Figur, und wie schwer wiegt dieselbe, wenn durch das Einsenken der Wasserspiegel um $2' 11'''$ erhöht wurde, und bekannt ist, dafs 1^c Wasser 44,37 Pf. wiegt, und das Gufseisen $7\frac{1}{2}$ Mahl schwerer als das Wasser ist?

50) Vier sechzigpfündige eiserne Kugeln sollen in sechs andere umgegossen werden, so, dafs die ersteren drey unter sich gleich und ihr Durchmesser $\frac{2}{3}$ des Durchmessers einer der andern drey Kugeln werde, welche ebenfalls unter sich gleich seyn sollen. Wie grofs ist der Durchmesser von jeder dieser zwey Kugelgattungen, und wie schwer wiegt jede, wenn 1^c Wasser 44,37 Pf. wiegt, das Gufseisen $7\frac{1}{2}$ Mahl schwerer ist als Wasser, und angenommen wird, dafs beym Gufse $1\frac{1}{4}$ Procent verloren gehen?

51) In welchem Verhältnisse stehen die körperlichen Inhalte, so wie die Oberflächen, des Tetraëders und des Octaëders um dieselbe Kugel?

52) Man soll einen Cylinder so durch eine Kugel schieben, dafs ihre Achsen zusammen fallen. Der Cylinder soll $\frac{m}{n}$ der Kugel mit der Kugel gemein haben; wie grofs ist sein Durchmesser, wenn $r [= 1^o 11''$ Duodecimalmafs] der Radius der Kugel ist?

53) Die Höhe einer Kugelzone ist h , der Radius der obern Kreisfläche r , der der untern R ; man suche die Ergänzungshöhe bis zum Pole und den Radius der Kugel.

54) Die drey Seiten eines Dreyeckes sind a , b und c ; man soll den körperlichen Inhalt des Doppelkegels finden, welcher durch die Umdrehung des Dreyeckes um die Seite b entsteht.

55) In einem Trapeze sind die Winkel an der Grundlinie jeder 45^o , die drey Seiten (die Grundlinie nicht gerechnet) sind gleich grofs, der Inhalt des Trapezes ist $a [= 2^o 110''$ Duodecimalmafs]; man soll jede Seite dieser Figur finden.

56) Man soll aus $M [= 8]$ Pf. Eisen, dessen specifisches Gewicht $m = 7,2$ ist, eine hohle Kugel so verfertigen,

dafs sie, in Wasser gelegt, sich nur bis zur Hälfte einsenke. Wie grofs mufs ihr äufserer Durchmesser D und wie grofs der d der Höhlung genommen werden, wenn ein Cubicfufs Wasser 44,37 Pf. wiegt? [Die beyden Durchmesser sind im Duodecimalmafs auszudrücken.]

57) Die drey Seiten eines Dreyeckes sind $a = 33'$, $b = 50'$ und $c = 60'$; man suche die gerade Linie, von der Mitte der Seite a nach der gegenüberstehenden Winkelspitze gezogen.

58) In ein gleichseitiges Dreyeck, mit der Seite $a = 5'' 3'''$, soll ein, an Fläche halb so grofses, ebenfalls gleichseitiges Dreyeck so construirt werden, dafs die drey Winkelspitzen des letzteren in die drey Seiten des erstern fallen. Wie weit fallen die Ecken dieser beyden Dreyecke auseinander, und wie grofs ist die Seite des kleineren Dreyeckes? Man construire auch beyde Dreyecke.

59) Die Oberfläche eines geraden Kegels beträgt $33\Box'$ $50\Box''$ Duodecimalmafs. Der Diameter der Grundfläche verhält sich zur Höhe wie $5 : 9$, wie grofs ist der Diameter, die Höhe, die krumme Seitenfläche, die Grundfläche und der körperliche Inhalt dieses Kegels?

60) Der Radius eines Kreises misst $8' 5'''$, wie grofs ist die Seite des ihm an Fläche gleichen gleichseitigen Dreyeckes?

61) Im $\triangle ABC$ ist von der Spitze A auf die Grundlinie $BC = 9'$ die Höhe AD gefällt und $BD = 1'$; wie weit von C entfernt liegt der Punct, in welchem auf BC die Senkrechte errichtet werden mufs, welche die Fläche des ganzen Dreyeckes halbirt?

62) Jemand ist 161 Pf. schwer, er hängt sich 8 Pf. Kork an; wie viel Gewicht bleibt ihm zum Schwimmen, wenn das specifische Gewicht des menschlichen Körpers 1,012 und das des Korkes 0,24 ist?

63) Der Diameter einer 3pfündigen Kugel ist $2'' 7'''$ Duodecimalmafs, wie schwer ist eine Kugel aus derselben Mafse, wenn ihr Diameter $1' 2''$ misst?

64) Man soll in ein gleichseitiges Dreyeck ein Quadrat so construiren, dafs eine Quadratseite mit einer Seite des Dreyeckes zusammenfällt, und die beyden andern Sei-

ten des Dreyeckes durch zwey Ecken des Quadrates gehen. Wie groß ist die Seite des Quadrats, wenn die des Dreyeckes $a = 7' 4''$ ist?

65) Wie groß ist die Seite des Quadrates, wenn in der vorhergehenden Aufgabe das Dreyeck ein gleichschenkeliges ist, dessen Grundlinie $a = 5' 8''$ und Schenkel $b = 6'$ ist, und die Grundlinie mit der Quadrat-Seite zusammenfallen soll?

66) Man soll eine hohle eiserne, ein Pfund schwere, Kugel verfertigen, welche in Wasser gesenkt, in demselben schweben bleibt, wie groß ist der äußere Durchmesser und wie groß die Eisenstärke dieser Kugel zu nehmen, wenn das specifische Gewicht des Eisens 7,4 ist?

67) Man suche die Seite eines gleichseitigen Dreyeckes, welches so in ein Quadrat, mit der Seite $a = 7' 3''$, construirt werden soll, daß die 3 Ecken des Dreyeckes in den Umfang des Quadrates fallen.

68) Man soll in ein reguläres Dreyeck ein Quadrat so construiren, daß eine Ecke des Quadrats in die Mitte einer Seite des Dreyeckes fällt, und die zwey nächsten Ecken des Quadrats die beyden andern Seiten des Dreyeckes berühren.

69) Man soll einem 60 bayerische Pfund schweren Stücke Kupfer so viel Kork anhängen, daß beyde, in Wasser gesenkt, mit diesem ganz ins Gleichgewicht kommen. Ein pariser Cubicfuß Kupfer wiegt 600 pariser Pfund und ein solcher Cubicfuß Kork 16 Pfund $25\frac{3}{5}$ Loth, dann 1^{pc} Wasser 70 par. Pfund. Wie viele bayer. Pfunde Kork muß man obigem Kupfer anhängen, wenn 100 bayer. Pf. 114,66 pariser Pfund geben?

70) Es sey von einem abgekürzten Kegel, dessen obere Grundfläche den Radius $r = 4' 8''$, untere Grundfläche $R = 7' 9''$ hat, und dessen Höhe $h = 14'$ ist, durch einen zur Grundfläche parallelen Durchschnitt, ein Stück so abzuschneiden, daß der untere Theil sich zum ganzen verhalte wie $m : n$ oder wie 3 : 5. Wie groß muß der Radius des Durchschnitts und wie groß die Höhe des untern Theiles werden?

71) Die krumme Oberfläche eines Kegels bildet einen

Quadranten, dessen Fläche $55\text{ } \square' \text{ } 44\text{ } \square'''$ Duodecimalmaß ist; wie groß ist der körperliche Inhalt des Kegels?

72) Was kostet eine $25'$ lange bleyerne Röhre, deren Durchmesser im Lichten $4''$ und Metallstärke $7'''$ mißt, wenn 1^c Bley 795 Pf. wiegt, und das Pfund Bley 11 kr. kostet?

73) Von einem Würfel, dessen Seite $a = 3' 2''$ ist, werden die Ecken so abgeschnitten, daß der dadurch entstandene Körper von 6 regulären Achtecken und 8 gleichen Dreyecken begrenzt wird. Man suche den körperlichen Inhalt und die Oberfläche dieses Körpers.

74) Man soll in einem Kreise, dessen Radius $R = 7'' 2'''$ ist, drey kleinere unter sich gleich große Kreise so beschreiben, daß sie sich unter sich und den großen berühren; wie groß ist der Radius eines solchen kleineren Kreises, und in welchem Verhältnisse stehen überhaupt die Radien und die Flächen dieser Kreise? Man suche durch Construction den kleineren Radius und zeichne die ganze Figur mit vollster Genauigkeit.

75) Es sollen, unter denselben Umständen (wie 74), 4 kleinere Kreise in den großen beschrieben werden, wie groß ist der Radius der letztern, und in welchem Verhältnisse stehen überhaupt die Radien und die Flächen dieser Kreise? Man construire auch diese Figur.

76) Der Radius eines Kreises ist $r = 2'' 1'''$, man soll um diesen drey andere gleich große so beschreiben, daß sie sich der Ordnung nach unter sich und den ersten berühren, wie groß ist der Radius eines solchen Kreises?

77) Man soll um einen Kreis, dessen Radius $r = 4'''$ ist, vier andere gleich große beschreiben, welche den ersten und sich der Ordnung nach berühren. Man suche den Radius eines dieser Kreise.

78) Auf einem kreisrunden Platze soll in der Mitte ein Bassin ausgegraben werden. Die dadurch gewonnene Erde, soll zum Aufschütten des übrigen Theiles des Platzes verwendet werden, und dieser, nachdem die aufgeschüttete Erde wohl zusammengestampft worden, um eben so viel erhöht werden, als der Bassin tiefer wird. Wie groß ist der Radius des Bassin zu nehmen, wenn der des runden Platzes $184'$ mißt?

79) Eine gerade vierseitige Pyramide hat zur Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $a = 5''$; wie groß ist eine Seitenkante, wenn bekannt ist, daß die aneinanderstossenden Seitenflächen der Ordnung nach immer einen Neigungswinkel von 120° bilden?

80) Bey einer geraden achtseitigen Pyramide, die zur Grundfläche ein reguläres Achteck hat, ist eine Seitenkante sechsmal so groß, als eine Kante an der Grundfläche. Wie groß muß jede dieser Kanten werden, wenn der körperliche Inhalt der Pyramide 100^c betragen soll?

81) In einem hohlen geraden abgekürzten Kegel befindet sich eine Kugel, mit dem Radius $a = 3'' 5'''$, so, daß sie ohne Spielraum an den Boden und an die Seitenwand anliegt. Wenn nun der Diameter der Kugel zugleich auch die Höhe des abgekürzten Kegels, und der Radius der kleineren Grundfläche $r = 2'' 8'''$ ist; so fragt sich, wie groß der Radius der größern Grundfläche dieses abgekürzten Kegels ist.

82) Der hohle abgekürzte Kegel der vorigen Aufgabe soll um so viel höher werden, daß auf die erste Kugel noch eine zweyte größere ohne Spielraum gelegt werden kann, und die Höhe des ganzen abgekürzten Kegels der Summe der beyden Kugel-Durchmesser gleich wird. Wie groß wird der Radius der zweyten Kugel, wie groß die Tiefe des abgekürzten Kegels und wie groß der Radius der größern Grundfläche desselben?

83) Man soll von einer bleyernen Kugel, mit dem Radius $r = 5''$, ein Segment abschneiden, und daraus einen Würfel gießen, dessen Seite so groß wird, als die Höhe des Segments; wie groß muß letztere genommen werden?

84) Wie schwer sind die 7 gleich großen Kugeln, welche auf dem Boden eines hohlen Cylinders, in welchen eine 60 pfündige Kugel, von demselben Metalle, genau paßt, so liegen, daß in der Mitte eine, und um diese die übrigen 6 ohne Spielraum zu stehen kommen?

85) Es ist bekannt, daß man den körperlichen Inhalt eines jeden Körpers, welcher durch die Bewegung einer ebenen Figur entsteht, dadurch erhält, daß man den Flächeninhalt der bewegten Figur durch den Weg des Schwer-

punctes derselben multiplicirt. Man soll nun finden, wohin bey der halben Kreisfläche der Schwerpunct fällt, und wohin beym Quadranten?

86) Ueber der Sehne eines Quadranten, dessen Radius $r = 5''$ misst, wird ein Halbkreis beschrieben; man berechne die Fläche des durch die beyden Bogen begrenzten Stückes.

87) Ein kupferner Cylinder, dessen Durchmesser $d = 8''$ und Höhe $h = 2'$ misst, soll, um ihn im Wasser schwimmen zu machen, mit einem Korkring umgeben werden, dessen Höhe $b = \frac{3}{4}'$ beträgt. Das specifische Gewicht der Kupfers sey $n = 8,784$, das des Korkes $q = 0,24$. Wie groß ist der äußere Durchmesser des Korkringes und wie groß die Dicke desselben?

88) Bey einem geraden Kegel verhält sich die Grundfläche zur krumen Seitenfläche wie $2 : 3$; wie viele Grade hält der Bogen des Kreisausschnittes, welcher die krumme Seitenfläche dieses Kegels bildet?

89) Man suche das Flächen-Verhältniß des regulären Sechseckes zum regulären Achtecke um denselben Kreis.

90) Auf dem Boden eines hohlen Cylinders, in welchen eine 80pfündige Kugel genau paßt, liegen 4 unter sich gleich große kleinere von derselben Masse ohne Spielraum; wie schwer ist jede der letztern?

91) Man soll aus einer Kugel, deren Radius $r [= 5']$ ist, $\frac{m}{n} [= \frac{3}{4}]$ ihres körperlichen Inhaltes so herausbohren, daß die dadurch entstandene Höhlung einen Kegel bildet, dessen Spitze in den Pol der Kugel und dessen Achse mit der der Kugel zusammenfällt. Wie groß muß der äußere Radius der Höhlung werden?

92) Wie schwer ist jede der drey Kugeln, welche ohne Spielraum auf dem Boden eines hohlen Cylinders liegen können, wenn in diesen Cylinder genau eine 84 pfündige Kugel von derselben Masse paßt?

93) Ober einer, auf einer Ebene liegenden, Kugel, deren Radius $r = 1' 7''$ ist, befindet sich, $7''$ von derselben entfernt, ein leuchtender Punct; wie groß ist der Radius des schattigen Kreises auf der Ebene?

94) Ein abgekürzter Kegel von Bley, dessen oberer Durchmesser $1' 9''$, unterer $2' 4''$ und Höhe $3'$ beträgt, ist cylinderförmig so ausgehöhlt, daß der Diameter der Aushöhlung $1' 5''$ und deren Tiefe $2' 7''$ mißt. Dieser ausgehöhlte abgekürzte Kegel wird mit Wasser gefüllt, und es fragt sich, wie schwer alles zusammen wiegt, wenn ein pariser-Cubicfuß Bley 794,64 paris. Pfunde wiegt, 1113 bayer. Fufs 1000 par. Fufs und 100 bayer. 113,569 paris. Pf. geben, dann 1 bayer. Cubicfuß Wasser 44,37 bayer. Pfund wiegt. [Die Dimensionen sind im bayer. Duodecimalmaße gegeben und das Gewicht des Ganzen ist nach bayer. Pfund, Loth und Quintel anzugeben.]

95) Man soll den Winkel jenes Bogens finden, dessen Länge dem Radius gleich ist.

96) Eine Rakete erreicht im Steigen eine Höhe von $\frac{1}{4}$ Meile; wie weit vom Platze, wo sie aufstieg, kann sie gesehen werden, die Erde als Kugel betrachtet, deren Aequator 5400 Meilen mißt?

97) Ein in Wasser versenkter, 9 Zentner schwerer, eiserner Körper, soll durch zwey gleich große mit Luft gefüllte Ballone unter dem Wasser so verbunden werden, daß alles darin schwebt. Angenommen, daß die Ballone selbst aus so feiner Masse verfertigt sind, daß auf das Gewicht und Volumen derselben keine Rücksicht zu nehmen ist; so fragt sich, wie groß ihr Durchmesser zu nehmen sey, wenn das specifische Gewicht des Eisens 7,3, das der Luft 0,00123 ist, und 1 Cubikfuß Wasser 44,37 Pf. wiegt.

98) Ein Cylinder, dessen Grundfläche den Durchmesser $6'' 8'''$ Duodecimalmaße hat, soll in Form eines abgekürzten Kegels so durchbohrt werden, daß die Höhlung $\frac{2}{3}$ der Masse des Cylinders beträgt, und das Verhältniß der beyden Radien des abgekürzten Kegels wie 3 : 4 ist; wie groß muß jeder derselben genommen werden?

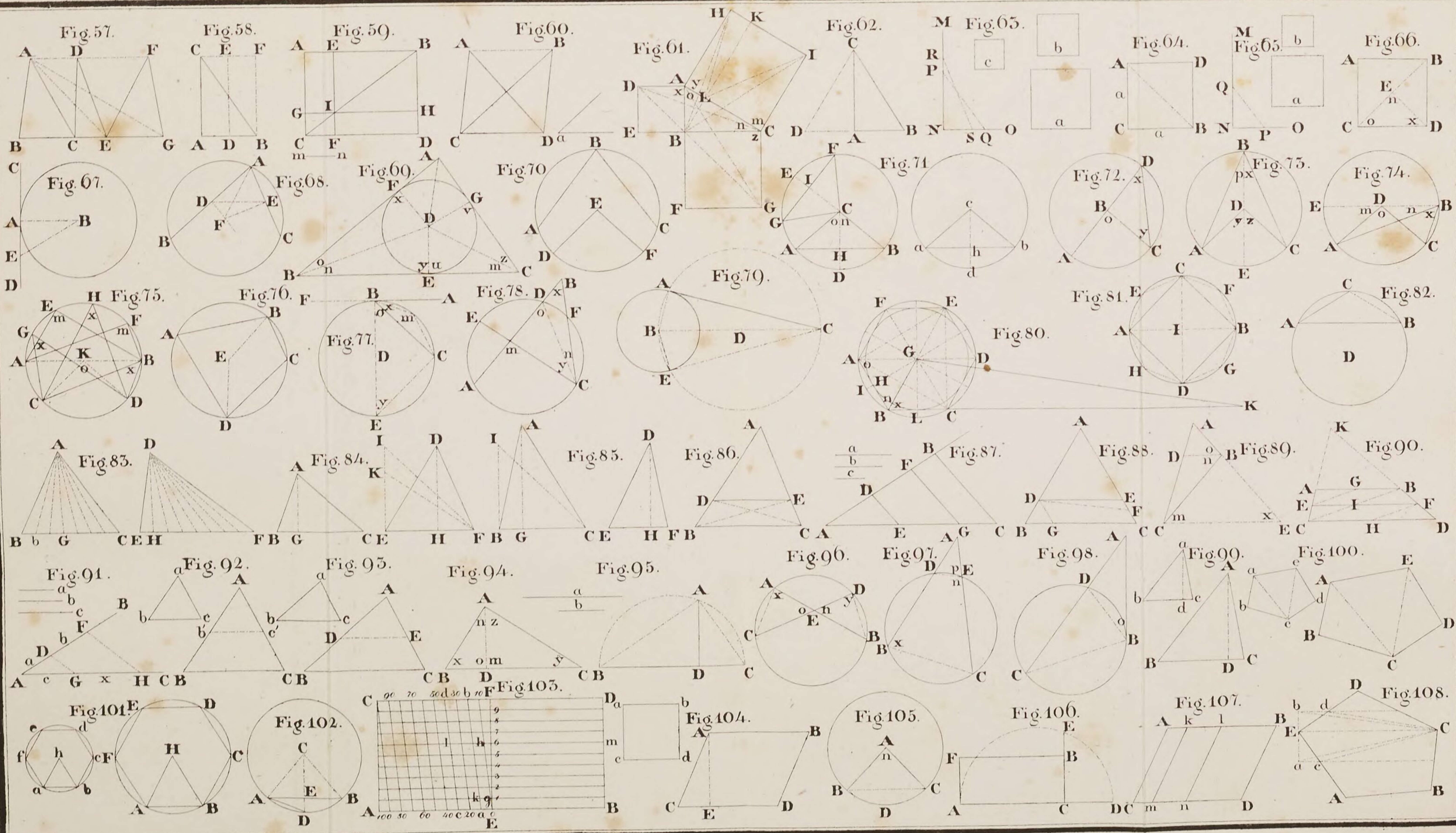
99) Man soll einen Kegel verfertigen, dessen körperlicher Inhalt $a = \frac{1}{8}$ Cubikfuß und der Diameter der Grundfläche $d = 5''$ werden soll. Wie groß ist die schiefe Seite desselben und wie groß der Winkel des Sectors zu nehmen, welcher das Netz der krumen Seitenfläche dieses Kegels bilden soll?

100) Bey einem abgek. Kegel sind die Höhe $h = 5' 3''$, die Radien $R = 2' 1''$, $r = 1' 4'''$ [Duod. M.] gegeben; man suche den Centralwinkel, zu welchem der concentrische Ring, als krumme Seitenfläche dieses Kegels, gehört.





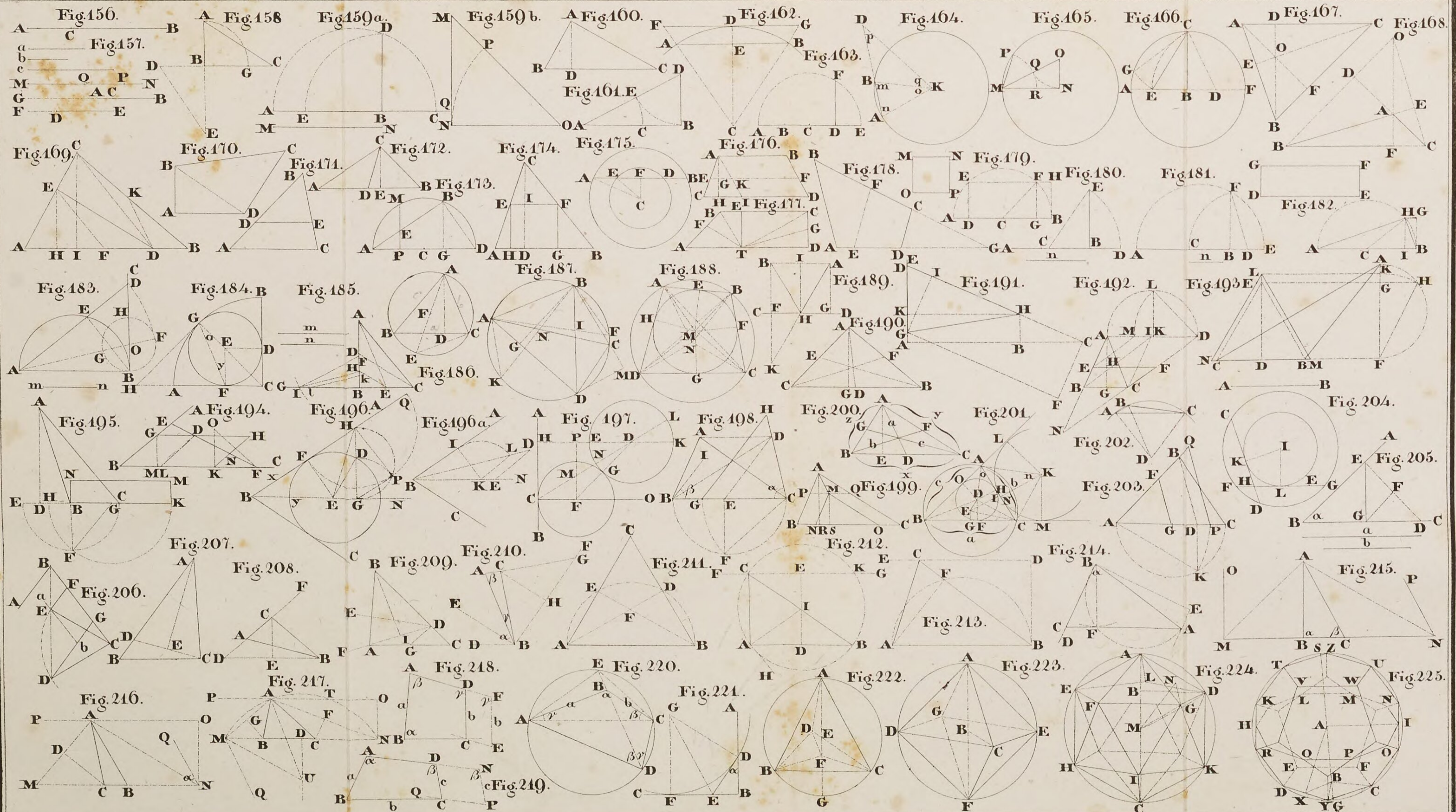






ZUR
BIBLIOTHEK
DER STIFTUNG DES
K. B. INGENSENSTADT
VON KERNRIED
GEHÖRIG







K. K. 8.

Unruh

Unruh, Raimund

Lehrbuch der Geometrie nebst ihrer ausgedehnten Anwendung auf die Lösung
geometrischer Probleme ; vorzüglich zum Gebrauche für Schulen

München 1831

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- K-K 624

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11255216-1